E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

Ce problème propose l'étude d'un algorithme d'approximation d'une solution de l'équation de la chaleur. On considère à cet effet un entier $N \geq 1$ et l'espace vectoriel $\mathbb{R}^N$ qu'on munit de sa norme euclidienne usuelle. On identifiera tout vecteur $X \in \mathbb{R}^N$ à la matrice-colonne de ses N composantes $x_1, x_2, \ldots, x_N$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^N$ et on désignera par A_N et I_N les matrices réelles d'ordre N définies par :

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad I_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Si $N = 1$, A_1 et I_1 sont les matrices (1, 1) dont le seul élément est respectivement 0 et 1). Pour tout réel strictement positif donné r, on note M_N la matrice $M_N = (1 - 2r)\, I_N + r\, A_N$ et on étudie alors les suites vectorielles $j \longrightarrow X_j$ de $\mathbb{R}^N$ définies par la donnée de $X_0 \in \mathbb{R}^N$ et de la relation $X_{j+1} = M_N\, X_j$ pour $j \in \mathbb{N}$.

■ Partie I : Etude de la suite (X_j) dans le cas $N = 3$

1°) *Diagonalisation des matrices A_3 et M_3*

a) Expliciter la matrice A_3 et déterminer ses trois valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.
Donner des vecteurs propres unitaires V_1, V_2, V_3 associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3.

b) Préciser une matrice inversible P d'ordre 3 telle que $D_3 = P^{-1} A_3\, P$ soit diagonale.
Expliciter $P^{-1} M_3\, P$ où $M_3 = (1 - 2r)\, I_3 + r\, A_3$ et en déduire les valeurs propres de M_3.
Préciser pour quelles valeurs de r celles-ci appartiennent à l'intervalle]-1, 1[.

2°) *Etude de la suite vectorielle $j \longrightarrow X_j$*

On considère un vecteur $X_0 = x_1\, V_1 + x_2\, V_2 + x_3\, V_3$ de $\mathbb{R}^3$.

A partir de ce vecteur X_0, on définit ensuite la suite $j \longrightarrow X_j$ par la relation $X_{j+1} = M_3\, X_j$.

a) Préciser, pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'expression du vecteur X_j dans la base (V_1, V_2, V_3).

b) Préciser les valeurs du réel $r > 0$ pour lesquelles la suite vectorielle $j \longrightarrow X_j$ converge vers le vecteur nul *pour tout choix du vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^3$*.

■ Partie II : Etude de la suite (X_j) dans le cas général

3°) *Diagonalisation des matrices A_N et M_N*

a) Citer un théorème prouvant :

- que les N valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_N$ de la matrice A_N sont réelles.
- qu'il existe une matrice orthogonale P d'ordre N telle que $D_N = P^{-1} A_N\, P$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont, dans cet ordre, les réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$.

b) Soient une valeur propre λ de A_N et un vecteur propre associé X, dont les composantes sont notées $x_1, x_2, \ldots, x_N$, et soit m un indice tel que $|x_m| = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|)$.
Montrer qu'on a $\lambda\, x_m = x_{m-1} + x_{m+1}$ pour $2 \le m \le N-1$, et montrer que cette formule reste valable pour $m = 1$ en posant $x_0 = 0$, et pour $m = N$ en posant $x_{N+1} = 0$.
En déduire que $|\lambda|\,|x_m| \le 2\,|x_m|$, puis que $|\lambda| \le 2$.

c) On suppose que X est un vecteur de $\mathbb{R}^N$ tel que $A_N\,X = 2\,X$.
Exprimer $x_2, x_3, \ldots, x_N$ en fonction de x_1 et en déduire que X est le vecteur nul.
Etablir un résultat analogue si X est un vecteur de $\mathbb{R}^N$ tel que $A_N\,X = -2\,X$.
En déduire que les valeurs propres de A_N appartiennent à l'intervalle]-2, 2[, et que pour chacune d'entre elles existe un unique réel $\theta \in]0, \pi[$ tel qu'on ait $\lambda = -2\cos(\theta)$.

d) Calculer $P^{-1}\,M_N\,P$ où $M_N = (1-2\,r)\,I_N + r\,A_N$ et en déduire les valeurs propres de M_N en fonction des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ de A_N.
Etablir, si $0 < r \le \frac{1}{2}$, que les valeurs propres de M_N appartiennent à l'intervalle]-1, 1[.

4°) *Détermination des valeurs propres de la matrice A_N*

Pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$, on considère le déterminant d'ordre N défini par :

$$D_N(\theta) = \det(A_N + 2\cos(\theta)\,I_N).$$

Par convention, on posera $D_0(\theta) = 1$ et $D_1(\theta) = 2\cos(\theta)$.

a) Etablir la relation $D_{N+1}(\theta) - 2\cos(\theta)\,D_N(\theta) + D_{N-1}(\theta) = 0$ pour $N \ge 1$.

b) Démontrer la formule suivante pour tout entier naturel N :

$$D_N(\theta) = \frac{\sin((N+1)\,\theta)}{\sin(\theta)}.$$

c) En déduire les N réels $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ appartenant à]0, π[tels qu'on ait :

$$\lambda_1 = -2\cos(\theta_1) < \lambda_2 = -2\cos(\theta_2) < \ldots < \lambda_N = -2\cos(\theta_N).$$

5°) *Etude de la suite vectorielle $j \longrightarrow X_j$*

Dans cette question, on donne une base orthonormale $(V_1, V_2, \ldots, V_N)$ de vecteurs propres de A_N associés à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ et un vecteur $X_0 = x_1\,V_1 + x_2\,V_2 + \ldots + x_N\,V_N$ de $\mathbb{R}^N$.
A partir de ce vecteur X_0, on définit ensuite la suite $j \longrightarrow X_j$ par la relation $X_{j+1} = M_N\,X_j$.

a) Préciser, pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'expression du vecteur X_j dans la base $(V_1, V_2, \ldots, V_N)$.
En déduire l'expression de la norme euclidienne $\|X_j\|$ du vecteur X_j.

b) On suppose $0 < r \le \frac{1}{2}$. Montrer que la suite $j \longrightarrow X_j$ converge vers le vecteur nul.

c) On suppose $r > \frac{1}{2}$ et on choisit ici $X_0 = V_1$.
Etablir que la suite réelle $j \longrightarrow \|X_j\|$ diverge vers $+\infty$ si N est choisi assez grand.

d) On suppose $r > \frac{1}{2}$ et on choisit ici $X_0 = x_1\,V_1 + x_2\,V_2 + \ldots + x_N\,V_N$ avec $x_1 \ne 0$.
Etablir que la suite réelle $j \longrightarrow \|X_j\|$ diverge vers $+\infty$ si N est choisi assez grand.

■ Partie III : Etude d'une discrétisation de l'équation de la chaleur

6°) Déterminer les limites suivantes lorsque $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad ; \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

On étudie la température $u(x,\, t)$ d'une barre de longueur L au point d'abscisse x $(0 \le x \le L)$ et à l'instant t $(t \ge 0)$. On démontre que u doit être une fonction continue sur $[0,\, L] \times \mathbb{R}_+$, qui admet des dérivées partielles continues d'ordre 1 en t et d'ordre 2 en x sur $[0,\, L] \times \mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'équation de la chaleur (C), où $\omega > 0$ désigne une constante physique :

$$\forall\, (x,\, t) \in [0,\, L] \times \mathbb{R}_+^* : \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\, t) = \omega^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\, t).$$

On suppose de plus que :

◇ la température initiale de la barre à l'instant 0 est connue : $\forall\, x \in [0,\, L],\ u(x,\, 0) = \varphi(x)$ où $\varphi : [0,\, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 s'annulant en 0 et L : $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$.

◇ les extrémités de la barre restent à une température nulle : $\forall\, t \ge 0,\ u(0,\, t) = u(L,\, t) = 0$.

Le but est ici d'obtenir des approximations de cette solution u aux différents points $(x_i,\, t_j)$ d'un maillage du domaine $[0,\, L] \times \mathbb{R}_+$, où les réels x_i et t_j sont définis comme suit :

- pour $0 \le i \le N+1$, on a $x_i = i\,\Delta x = \frac{i\,L}{N+1}$ où $\Delta x = \frac{L}{N+1}$ est le pas de longueur.
- pour $j \in \mathbb{N}$, on a $t_j = j\,\Delta t$ où $\Delta t > 0$ est le pas de temps.

Les résultats de la question 6° incitent maintenant à remplacer l'équation de la chaleur (C) aux points du maillage par les relations approchées suivantes, où $0 \le i \le N+1$ et $j \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u(x_i,\, t_{j+1}) - u(x_i,\, t_j)}{\Delta t} \approx \omega^2\, \frac{u(x_{i+1},\, t_j) - 2\, u(x_i,\, t_j) + u(x_{i-1},\, t_j)}{(\Delta x)^2}.$$

On recherche donc des approximations $u_{i,j}$ de $u(x_i,\, t_j)$ définies par les relations exactes :

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \omega^2\, \frac{u_{i+1,j} - 2\, u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

et on pose compte tenu des conditions initiales et des conditions aux limites du problème :

$$u_{i,0} = \varphi(x_i) \text{ pour } 0 \le i \le N+1 \qquad ; \qquad u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0 \text{ pour } j \in \mathbb{N}.$$

7°) *Etude des approximations $u_{i,j}$ de la solution u*

Soit U_j le vecteur de $\mathbb{R}^N$ dont les composantes sont les approximations $u_{1,j},\, u_{2,j},\, \dots,\, u_{N,j}$ à l'instant t_j de la solution u aux points d'abscisses $x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_N$.

a) Expliciter U_0 et vérifier que U_{j+1} s'obtient à partir de U_j par une relation matricielle de la forme $U_{j+1} = M_N\, U_j$, où on explicitera le réel r définissant $M_N = (1 - 2\,r)\, I_N + r\, A_N$.

b) On peut montrer que la solution unique u du problème posé reste bornée sur $[0,\, L] \times \mathbb{R}_+$, ce qui est naturel d'après son interprétation physique.

- Montrer, si $2\,\omega^2\,\Delta t \le (\Delta x)^2$, que la suite $j \longrightarrow U_j$ des approximations reste aussi bornée.
- Montrer, si $2\,\omega^2\,\Delta t > (\Delta x)^2$, que la suite $j \longrightarrow U_j$ n'est pas bornée en général.

Dans ce dernier cas, les $u_{i,j}$ ne peuvent donc être de bonnes approximations des $u(x_i,\, t_j)$.

c) Ecrire un algorithme de calcul des approximations $u_{1,j},\, u_{2,j},\, \dots,\, u_{N,j}$ à l'instant $t_j = j\,\Delta t$ lorsque les autres données du problème sont connues.