Réalisation d'un chauffe eau solaire

PREMIERE PARTIE

1) Bilan thermique de l'absorbeur :

Par unité de surface et de temps, l'absorbeur :

- reçoit P_s du soleil.
- fournit : $h_0(T_a - T_e) + h(T_a - T)$ à la couche d'air et à l'eau.

L'absorbeur a une capacité calorifique négligeable : il n'emmagasine ni ne cède de l'énergie. On en déduit :

$$P_s = h_0(T_a - T_e) + h(T_a - T)$$

Soit :

$$\boxed{P_s = (h_0 + h)T_a - h_0 T_e - hT} \quad (1)$$

2) Bilan thermique de l'eau :

Pendant le temps dt, l'eau reçoit l'énergie :

$$\delta W = h(T_a - T) \cdot dt \cdot ab$$

Si pendant ce temps dt sa température varie de dT, son énergie interne augmente de :

$du = \mu Cabe\, dT$ (ou son enthalpie dH, l'eau étant incompressible).

On en déduit :

$du = \delta W$, soit : $\mu\, Cabe\, dT = hab(T_a - T)dt$

d'où :

$$\boxed{\mu Ce \frac{dT}{dt} = h(T_a - T)} \quad (2)$$

3) On élimine T_a entre les équations (1) et (2) :

on tire T_a de (1) :

$$T_a = \frac{P_s}{h_0 + h} + \frac{h_0}{h_0 + h} T_e + \frac{h}{h_0 + h} T$$

et on porte dans (2) :

$$\mu Ce \frac{dT}{dt} = \frac{h}{h_0 + h} P_s + \frac{h_0 h}{h_0 + h} T_e + \frac{h^2}{h_0 + h} T - hT$$

soit :

$$\mu Ce \frac{dT}{dt} = \frac{h}{h_0 + h} P_s + \frac{h_0 h}{h_0 + h} T_e + \frac{h^2 - h_0 h - h^2}{h_0 + h} T$$

$$\mu Ce \frac{dT}{dt} = \frac{h}{h_0 + h} \left[P_s + h_0 T_e - h_0 T \right]$$

Soit en ordonnant :

$$\boxed{\mu Ce\frac{dT}{dt}+\frac{h_0 h}{h_0+h}T=\frac{h}{h_0+h}\left[P_s+h_0 T_e\right]}$$

4) Lorsque la température atteint sa valeur limite, elle ne varie plus : $\frac{dT}{dt}=0$

On a alors :

$$h_0 T_\ell = P_s + h_0 T_e \quad \text{d'où :} \quad T_\ell = T_e + \frac{P_s}{h_0}$$

5) T_1 constitue une solution particulière de l'équation avec second membre.

L'équation homogène s'écrit :

$$\mu Ce\frac{dT}{dt}+\frac{h_0 h}{h_0+h}T=0$$

et sa solution générale :

$$T = Ae^{-\frac{h_0 h}{\mu Ce(h_0+h)}t}$$

d'où la solution recherchée :

$$T = Ae^{-\frac{h_0 h}{\mu Ce(h_0+h)}t}+T_\ell$$

à $t=0, T=T_e$: $T_e = A + T_\ell$ d'où : $A = T_e - T_\ell$.

$$T=(T_e-T_\ell)e^{-\frac{h_0 h}{\mu Ce(h_0+h)}t}+T_\ell$$

avec, si $h_0 << h$:

$$\boxed{T\approx(T_e-T_\ell)e^{-\frac{h_0}{\mu Ce}t}+T_\ell}$$

6) Aplication numérique :

a) $T_\ell=\frac{640}{4}+298$ $\quad\boxed{T_\ell = 458\text{ K}}$

b) L'expression numérique de T est :

$$T = 458 - 160\, e^{-9{,}57\cdot 10^{-5}t}$$

au temps t_1 : $T = T_1 = 345\text{ K}$:

$$e^{-9{,}57\cdot10^{-5}t_1}=\frac{458-345}{160}$$

$$t_1=\frac{1}{-9{,}57\cdot10^{-5}}\ln\left(\frac{160}{458-345}\right)$$

$t_1 = 3634 s$
$t_1 \approx 1h\ 34s$

7)

On obtient en moyenne le volume abe d'eau du réservoir pendant le temps t_1, soit un debit volumique moyen :

$$D_1 = \frac{abe}{t_1}$$

$$D_1 = \frac{20\ l}{3634\ s}$$

$$D_1 = 5{,}5 \cdot 10^{-3}\ l/s$$

$$\boxed{D_1 = 19{,}8\ \ l/heure}$$

8) Si on n'utilise pas d'eau chaude :

en l'absence de circuit primaire, l'eau ne circulera pas, et risque de chauffer au voisinage de sa température limite de $450\ \mathrm{K}$, bien au delà de sa température d'ébullition, d'où des risques de forte surpressions, voire d'explosion du dispositif : l'eau doit circuler dans le capteur, qu'on utilise ou non de l'eau chaude.

DEUXIEME PARTIE :

1)

La quantité d'eau (volume) qui traverse uns section droite ae pendant dt s'écrit :

$$d\tau = v_0 ae\, dt$$

d'où le débit :

$$D = \frac{d\tau}{dt} \qquad \boxed{D = aev_0}$$

2)

Le bilan thermique de la plaque met en jeu les mêmes échanges que dans la première partie ; comme T_a dépend de x, on fait le bilan sur l'élément de dimensions a et dx :

- puissance reçue : $P_s adx$
- puissance évacuée : $adx[h_0(T_a - T_e) + h(T_a - T)]$

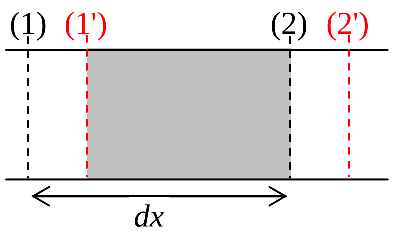
$$P_s adx = adx[h_0(T_a - T_e) + h(T_a - T)]$$

On obtient le même bilan que dans la première partie, soit :

$$\boxed{P_s = (h_0 + h)T_a - h_0 T_e - hT} \quad (3)$$

3)

Bilan thermique de l'eau :



a) Pendant le temps dt, les pistons amont et aval (1 et 2) ont avancé de $v_0\ dt$.

b) La transformation de l'eau qui se trouve entre les 2 pistons correspond à remplacer le volume $aev_0\ dt$ en amont par le volume $aev_0\ dt$ en aval.

En effet, en RP, la partie grisée ne subit pas de transformation.
La variation d'énergie interne de ce volume entre l'instant t et l'instant $t + dt$ s'écrit :

$$dH = \mu Ceav_0 dtT(x + dx) - \mu Ceav_0 dt T(x)$$

soit :

$$dH = \mu Ceav_0 \cdot dt \cdot \frac{dT}{dx} \cdot dx\,.$$

c) Pendant le temps dt , la tranche reçoit l'énergie calorifique :

$$\delta W = a\,dx\,h(T_a - T)\,dt$$

d) L'équation bilan s'écrit donc :

$$\mu Cea\,v_0\,dt\frac{dT}{dx}dx = a\,h\,dx\,(T_a - T)\,dt$$

Soit :

$$\boxed{e\,v_0\mu\,C\frac{dT}{dx} = h(T_a - T)} \qquad (4)$$

4)

a) On tire T_a de l'équation (3) :

$$T_a = \frac{P_s}{h_0 + h} + \frac{h_0}{h_0 + h}T_e + \frac{h}{h_0 + h}T$$

et on porte dans (4)

$$ev_0\mu C\frac{dT}{dx} = \frac{h}{h_0 + h}P_s + \frac{h_0 h}{h_0 + h}T_e + \frac{h^2}{h_0 + h}T - hT$$

soit :

$$\boxed{ev_0\,\mu C\frac{dT}{dx} + \frac{h_0 h}{h_0 + h}T = \frac{h}{h_0 + h}[P_s + h_0 T_e]}$$

b) La solution particulière s'écrit :

$$T_p = \frac{P_s}{h_0} + T_e$$

(physiquement, ce serait la température atteinte si $x \longrightarrow \infty$)

Et la solution générale de l'équation homogène :

$$T = Ae^{-\frac{h_0\,h}{ev_0\mu\,C(h_0+h)}x}$$

D'où, avec $\frac{h}{h_0 + h} \approx 1$, la solution en T(x)

$$T(x) = T_p + Ae^{-\frac{h_0\,h}{e\,v_0\mu\,C}x}$$

$x = 0 : T = T_e :$ $\qquad T_e = A + T_p$

$$\boxed{T(x) = (T_e - T_p)e^{-\frac{h_0}{e\,v_0\mu\,C}x} + T_p}$$

Ou en fonction de D $\quad (a v_0 = \frac{D}{E})$:

$$\boxed{T(x) = (T_e - T_p) e^{-\frac{h_0 a}{\mu C D} x} + T_p}$$

c) Numériquement :

$$T_p = 458\ \mathrm{K} \qquad D = 20\ litres/heure = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{3600} m^3/s$$

$$\frac{h_0\, a}{\mu C D} + \frac{4 \times 2 \times 3600}{10^3 \times 4{,}18 \cdot 10^3 \times 20 \cdot 10^{-3}} = 0{,}345\, m^{-1}$$

$$\boxed{T(x) = 458 - 160\, e^{-0{,}345\, x}}$$

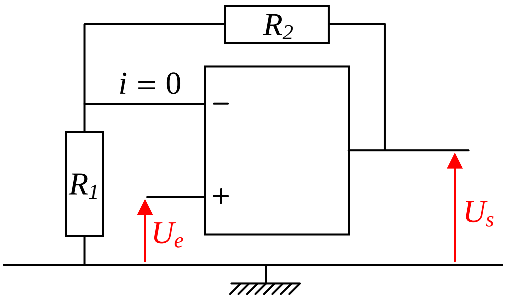
A la sortie, la température est $T(b)$:

$$T(b) = 458 - 160\, e^{-0{,}345} \qquad \boxed{T(b) = 345\,\mathrm{K}}$$

TROISIEME PARTIE.

1)

a)



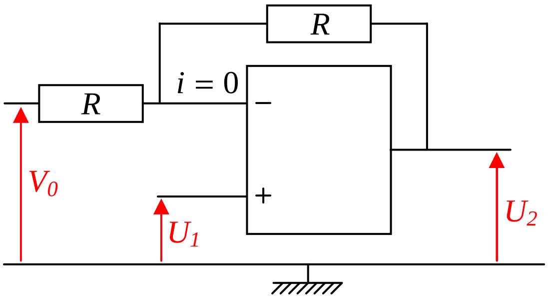
AOP parfait en régime linéaire.

- courant d'entrée $= 0$
- $v_+ = v_-$

or $v_+ = U_e$

et $v_- = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} U_s$ d'où : $\boxed{G = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}}$

b)

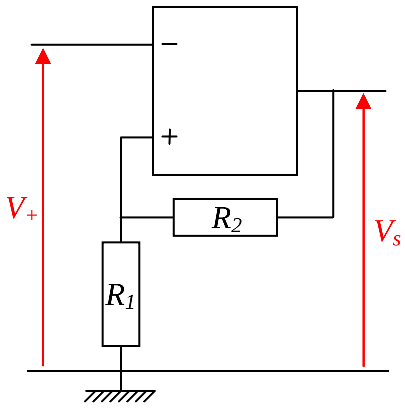


L'AOP est toujours parfait et fonctionne en régime linéaire.

$v_- = U_1$ et les 2 résistances R sont traversées par le même courant :

$\dfrac{V_0 - U_1}{R} = \dfrac{U_1 - U_2}{R}$ soit : $U_2 = 2U_1 - V_0$

c)



α) Les courants d'entrée sont nuls :

$$v_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$$

β) En saturation haute : $V_1 = V_{sat}$, d'où :

$$v_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$$

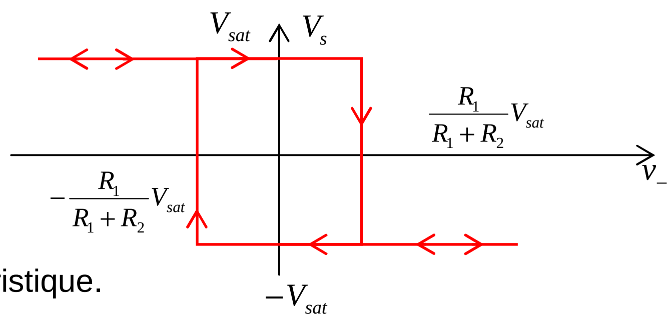
v_- est faible. Tant qu'il est inférieur à v_+, ou reste en saturation haute.

Lorsque v_- devient très légèrement supérieur à $\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$, $\varepsilon < 0$, on bascule en saturation basse : $V_s = -V_{sat}$.

γ) On a alors : $v_+ = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$.

Pour rebasculer en saturation haute, il faut que v_- devienne très légèrement inférieur à v_+ : bascule à $-\frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$.

On en déduit ci-contre la courbe caractéristique.



2)

En notant t la température en $°C$: $V(t) = Kt$.

On obtient, avec les résultats précédents :

$$V_1 = GK \cdot t \qquad G = \frac{47+4{,}7}{4{,}7} = 11 \qquad \boxed{\begin{array}{c} V_1 = 0{,}11 \cdot t \\ V_2 = 0{,}22 \cdot t - 11 \end{array}}$$

$$V_2 = 2V_1 - V_0$$

3)

La bascule de $-V_{sat}$ à V_{sat} se fait pour :

$V_2 = -\frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$, soit, avec $V_{sat} = 12V : V_2 = -1{,}09V$

donc la température t, telle que :

$$0{,}22t_1 - 11 = -1{,}09V \qquad \boxed{t_1 = 45°C}$$

et de V_{sat} à $-V_{sat}$:

$V_2 = 1{,}09V$, donc à la température t_2, telle que :

$$0{,}22t_2 - 11 = 1{,}09V \qquad \boxed{t_2 = 55°C}$$

4)

Si $V_s = V_{sat}$: $V_{s1} = 0$ et $V_{s2} = 12V$

Si $V_s = -V_{sat}$: $V_{s1} = -12V$ et $V_{s2} = 0$

à t élevée, $V_s = -V_{sat}$. Lorsque t décroit et atteint t_1 , V_s bascule à V_{sat}. Il faut alors que EV_s. s'ouvre, donc, qu'elle reçoive $\pm 12V$.

il faut la brancher sur V_{s_2}.

en revanche, lorsque la température augmente et atteint t_2 , V_s bascule à $-V_{sat}$.
Il faut ouvrir EV_2 qui doit donc être branchée sur V_{s_1}.