Corrigé de l'épreuve I

Discrétisation de l'équation de la chaleur

■ Partie I

1°)a) Le polynôme caractéristique de A_3 est $\det(A_3 - X\, I_3) = -X^3 + 2\,X$.

La matrice A_3 a donc trois valeurs propres distinctes : $-\sqrt{2}$, 0, $+\sqrt{2}$.

Un vecteur propre unitaire associé à $-\sqrt{2}$ est $V_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Un vecteur propre unitaire associé à 0 est $V_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Un vecteur propre unitaire associé à $+\sqrt{2}$ appartient à $V_3 = \left(\frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ces trois vecteurs propres sont de plus deux à deux orthogonaux, ce qui est logique puisqu'une matrice symétrique réelle diagonalise en base orthonormale.

b) On en déduit la relation suivante (où $P^{-1} = {}^tP$ avec la matrice P choisie) :

$$D_3 = P^{-1}\,A_3\,P = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $P^{-1}\,M_3\,P = P^{-1}((1-2\,r)\,I_3 + r\,A_3)\,P = (1-2\,r)\,I_3 + r\,D_3$, d'où :

$$P^{-1}\,M_3\,P = (1-2\,r)\,I_3 + r\,D_3 = \begin{pmatrix} 1-2\,r-r\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\,r & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\,r+r\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de M_3 sont donc $1-2\,r-r\sqrt{2}$, $1-2\,r$, $1-2\,r+r\sqrt{2}$.

Celles-ci appartiennent à]-1, 1[si et seulement si on a simultanément :

- $-1 < 1-2\,r-r\sqrt{2}$, ce qui a lieu si et seulement si $r < \frac{2}{2+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$.
- $1-2\,r+r\sqrt{2} < 1$, ce qui est nécessairement réalisé car r est strictement positif.

Ainsi, la condition cherchée est $\boxed{r < 2-\sqrt{2}}$.

2°)a) Comme V_1, V_2, V_3 sont vecteurs propres de A_3, et aussi de $M_3 = (1-2\,r)\,I_3 + r\,A_3$, on obtient pour tout vecteur $X_0 = x_1\,V_1 + x_2\,V_2 + x_3\,V_3$ de $\mathbb{R}^3$:

$$M_3\,X_0 = x_1\left(1-2\,r-r\sqrt{2}\right)V_1 + x_2(1-2\,r)\,V_2 + x_3\left(1-2\,r+r\sqrt{2}\right)V_3.$$

On en déduit par récurrence évidente :

$$X_j = M_3^j\,X_0 = x_1\left(1-2\,r-r\sqrt{2}\right)^j V_1 + x_2(1-2\,r)^j\,V_2 + x_3\left(1-2\,r+r\sqrt{2}\right)^j V_3.$$

b) Pour $r < 2 - \sqrt{2}$, les trois valeurs propres appartiennent à]-1, 1[.
On en déduit que la suite (X_j) tend vers le vecteur nul.
Sinon, on a $\lambda_1 \leq -1$, et la suite (X_j) de premier terme $X_0 = V_1$ vérifie $M_3^j\, V_1 = \lambda_1^j\, V_1$.
Comme $|\lambda_1| \geq 1$, elle ne tend pas vers 0.
Ainsi, la condition cherchée est $\boxed{r < 2 - \sqrt{2}}$.

■ Partie II

3°)a) Comme la matrice A_N est symétrique réelle, on sait bien que ses N valeurs propres sont réelles, et on sait aussi qu'elle diagonalise en base orthonormale, ce qui justifie l'existence d'une matrice inversible P (pouvant être choisie orthogonale) telle que :

$$P^{-1}\, A_N\, P \;=\; \mathrm{Diag}(\lambda_1,\, \lambda_2,\; \dots,\, \lambda_N).$$

b) Si λ est une valeur propre de A_N et X un vecteur propre associé, on a $A_N\, X = \lambda\, X$, ou :

$$\forall\, k \in [\![1,\, N]\!],\quad x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda\, x_k$$

où $x_0 = 0$ si $m = 1$, $x_{N+1} = 0$ si $m = N$. Si $|x_m| = \max(|x_1|,\, |x_2|,\; \dots,\, |x_n|)$, on a donc :

$$|\lambda|\, |x_m| \;\leq\; |x_{m-1}| + |x_{m+1}| \leq 2\, |x_m|.$$

Comme un vecteur propre n'est pas nul, on a $|x_m| > 0$, donc $|\lambda| \leq 2$.

c) Si $A_N\, X = 2\, X$, on a les N relations suivantes :

$$x_2 = 2\, x_1,\;\; x_1 + x_3 = 2\, x_2,\;\; \dots\;,\;\; x_{k-1} + x_{k+1} = 2\, x_k,\quad x_{N-2} + x_N = 2\, x_{N-1},\;\; x_{N-1} = 2\, x_N.$$

On en déduit par récurrence facile $x_2 = 2\, x_1$, $x_3 = 3\, x_1$, ... , $x_k = k\, x_1$, ... , $x_N = N\, x_1$, et la dernière équation donne $(N+1)\, x_1 = 0$, donc $x_1 = 0$ et par conséquent $X = 0$.
Ainsi, 2 n'est pas valeur propre de la matrice A_N.
De même, si $A_N\, X = -2\, X$, on obtient par récurrence $x_k = (-1)^{k-1}\, k\, x_1$ pour $1 \leq k \leq N$ et la dernière équation $x_{N-1} = -2\, x_N$ donne encore $x_1 = 0$ et par conséquent $X = 0$.
Ainsi, -2 n'est pas valeur propre de la matrice A_N.

Finalement, les valeurs propres $\lambda_1,\, \lambda_2,\; \dots,\, \lambda_N$ de A_N sont réelles et vérifient $|\lambda| < 2$.
Pour chacune d'entre elles existe donc un réel $\theta \in]0, \pi[$ tel qu'on ait $\lambda = -2\cos(\theta)$.

d) Comme $P^{-1}\, M_N\, P = P^{-1}((1 - 2\, r)\, I_N + r\, A_N)\, P = (1 - 2\, r)\, I_N + r\, D_N$, on a donc :

$$P^{-1}\, M_N\, P = \begin{pmatrix} (1-2\,r) + r\,\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-2\,r) + r\,\lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (1-2\,r) + r\,\lambda_N \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $(1 - 2\, r)\, I_N + r\, A_N$ sont donc les réels $(1 - 2\, r) + r\, \lambda_k$ $(1 \leq k \leq N)$.
Comme $|\lambda_k| < 2$, ces N valeurs propres de M_N appartiennent à]-1, 1[si $0 < r \leq \frac{1}{2}$ car on a :

$$-1 < 1 - 4\, r = (1 - 2\, r) - 2\, r \;<\; (1 - 2\, r) + r\, \lambda_k \;<\; (1 - 2\, r) + 2\, r = 1.$$

4°)a) On considère le déterminant suivant :

$$D_N(\theta) = \det(A_N + 2\cos(\theta)\, I_N) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2\cos(\theta) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on a $D_{N+1}(\theta) = 2\cos(\theta)\, D_N(\theta) - D_{N-1}(\theta)$.
Comme $D_1(\theta) = 2\cos(\theta)$ et $D_2(\theta) = 4\cos^2(\theta) - 1$, il est correct de poser $D_0(\theta) = 1$.

b) On vérifie par récurrence la relation proposée : celle-ci est valable pour $N = 0$ et $N = 1$, et si elle est vraie jusqu'au rang N, on a (puisque $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$) :

$$D_{N+1}(\theta) = 2\cos(\theta)\, \frac{\sin((N+1)\,\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin(N\,\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((N+2)\,\theta)}{\sin(\theta)}.$$

c) D'après la question 3°, on sait que les valeurs propres de A_N s'écrivent $\lambda = -2\cos(\theta)$ avec $0 < \theta < \pi$ et un tel réel $\lambda = -2\cos(\theta)$ est valeur propre de A_N si et seulement si :

$$\det(A_N - \lambda\, I_N) = \det(A_N + 2\cos(\theta)\, I_N) = \frac{\sin((N+1)\,\theta)}{\sin(\theta)} = 0.$$

On en déduit que $\theta = \frac{k\,\pi}{N+1}$ avec $1 \le k \le N$ et les valeurs propres de A_N sont donc :

$$\lambda_1 = -2\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right) < \lambda_2 = -2\cos\left(\frac{2\,\pi}{N+1}\right) < \ldots < \lambda_N = -2\cos\left(\frac{N\,\pi}{N+1}\right).$$

5°)a) Comme $A_N\, V_k = \lambda_k\, V_k$, on a pour $1 \le k \le N$:

$$M_N\, V_k = ((1-2\,r)\, I_N + r\, A_N)\, V_k = ((1-2\,r) + r\,\lambda_k)\, V_k.$$

On en déduit par récurrence facile sur l'entier j :

$$X_j = M_N^j\, X_0 = \sum_{k=1}^{N} x_k\, M_N^j\, V_k = \sum_{k=1}^{N} x_k((1-2\,r) + r\,\lambda_k)^j\, V_k.$$

Et comme la base $(V_1, V_2, \ldots, V_N)$ est orthonormale, on a :

$$\|X_j\|^2 = \sum_{k=1}^{N} x_k^2\,((1-2\,r) + r\,\lambda_k)^{2\,j} = \sum_{k=1}^{N} x_k^2\,((1-2\,r) - 2\,r\cos(\theta_k))^{2\,j}.$$

b) Si $0 < r \le 1/2$, les N valeurs propres $(1-2\,r) + r\,\lambda_k$ de M_N appartiennent à]-1, 1[.
On en déduit que la suite $j \longrightarrow X_j$ tend vers 0 quand j tend vers $+\infty$.

c) Si $X_0 = V_1$, on a donc $\|X_j\| = \left|(1-2\,r) - 2\,r\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right)\right|^j$.

Si $r > 1/2$, on remarque que $(1-2\,r) - 2\,r\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right) < -1$ pour N assez grand puisqu'on a :

$$\lim_{N \to +\infty} (1-2\,r) - 2\,r\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right) = 1 - 4\,r < -1.$$

Dans ce cas, la suite $j \longrightarrow \|X_j\| = \left|(1-2\,r) - 2\,r\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right)\right|^j$ diverge donc vers $+\infty$.

d) Si $X_0 = x_1\, V_1 + x_2\, V_2 + \ldots + x_N\, V_N$ avec $x_1 \neq 0$, ce résultat reste vrai puisqu'on a :

$$\left\|X_j\right\|^2 = \sum_{k=1}^{N} x_k^2\, ((1-2\,r) - 2\,r\cos(\theta_k))^{2\,j} \;\geq\; x_1^2\, ((1-2\,r) - 2\,r\cos(\theta_1))^{2\,j} \;\longrightarrow\; +\infty.$$

■ Partie III

6°) La formule de Taylor-Young donne, puisque f est de classe C^2 :

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2}\, f''(x) + o\left(h^2\right).$$

On en déduit que $f(x-h) = f(x) - h\, f'(x) + \frac{h^2}{2}\, f''(x) + o\left(h^2\right)$ et il en résulte que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2\, f(x) + f(x-h)}{h^2} \;=\; f''(x).$$

7°) Les approximations $u_{1,j},\ \ldots,\ u_{N,j}$ de la solution u aux points d'abscisses $x_1,\ \ldots,\ x_N$ et à l'instant t_j vérifient par définition les relations suivantes :

$$u_{i,j+1} = \left(1 - 2\,\frac{\omega^2\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_{i,j} + \frac{\omega^2\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right).$$

Si U_j est le vecteur dont les composantes sont les approximations $u_{1,j},\ u_{2,j},\ \ldots,\ u_{N,j}$ de la solution u aux points d'abscisses $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$ et à l'instant t_j, on a donc :

$$U_{j+1} = \left(\left(1 - 2\,\frac{\omega^2\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) I_N + \frac{\omega^2\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\, A_N\right) U_j.$$

Autrement dit, on a $U_{j+1} = M_N\, U_j$ où le réel r est ici défini par $r = \frac{\omega^2\,\Delta t}{(\Delta x)^2}$, et le vecteur U_0 est le vecteur de composantes $\varphi(\Delta x),\ \varphi(2\,\Delta x),\ \ldots,\ \varphi(N\,\Delta x)$.

D'après les résultats obtenus dans la partie II, on peut affirmer que :

b1) la suite $j \longrightarrow U_j$ tend vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$ lorsque $r = \frac{\omega^2\,\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$.

Ce résultat est nécessaire pour que les approximations de u soient correctes, puisque la solution $(x,\ t) \longrightarrow u(x,\ t)$ reste bornée au cours du temps.

b2) la suite $j \longrightarrow U_j$ peut en revanche diverger en norme vers $+\infty$ si $r = \frac{\omega^2\,\Delta t}{(\Delta x)^2} > \frac{1}{2}$.

Il suffit pour cela que que la composante de U_0 sur V_1 dans la base $(V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_N)$ soit non nulle et l'entier N assez grand.
Dans ce cas, les approximations de u sont alors incorrectes lorsque j tend vers $+\infty$, puisqu'on sait que la solution $(x,\ t) \longrightarrow u(x,\ t)$ reste bornée au cours du temps.
