Corrigé de l'épreuve commune

Un résultat préliminaire

a) La vérification est immédiate

b) $E_{xy}M = \sum_{j=1}^{p} m_{yj}E_{xj}$ et $ME_{xy} = \sum_{i=1}^{p} m_{ix}E_{iy}$

c) Si $M \in C_p$, $E_{xy}M = ME_{xy}$ pour $1 \leqslant x, y \leqslant p$ soit

$$\sum_{j \neq y} m_{yj}E_{xj} + m_{yy}E_{xy} = \sum_{i \neq x} m_{ix}E_{iy} + m_{xx}E_{xy}$$

ce qui donne $m_{xx} = m_{yy}$, $m_{ix} = 0$ si $i \neq x$ et $m_{yj} = 0$ si $j \neq y$.
En prenant $x = 1$, on a $\lambda = m_{11} = m_{yy}$ et $m_{yj} = 0$ si $1 \leqslant j \neq y \leqslant p$ donc $M = \lambda I_p$.
Inversement $M = \lambda I_p$ convient.
Ainsi

$$C_p = \{\lambda I_p / \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Partie I

1°) a) Il est clair que $d_A \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_p(\mathbb{K}))$.

b) $I_p \in Ker(d_A)$ car $d_A(I_p) = 0$. Ainsi d_A non injectif et donc non surjectif via le théorème du rang.
Enfin $d_A = 0$ ssi pour tout $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $AM = MA$ soit $A \in C_p$.

c) La vérification est immédiate en appliquant la définition de d_A.

2°) a) A est diagonalisable donc il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
Ainsi ${}^tA = ({}^tP)^{-1}\,{}^tD\,{}^tP = ({}^tP)^{-1}D\,{}^tP$ donc ${}^tA$ est diagonalisable.

b) $P_A(x) = det(A - xI_p) = det({}^t(A - xI_p)) = det({}^tA - xI_p)$ donc A et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique.

c) On a

$$\begin{aligned}
d_A(V_i\,{}^tW_j) &= AV_i\,{}^tW_j - V_i\,{}^tW_jA \\
&= (AV_i){}^tW_j - V_i\,{}^t({}^tAW_j) \\
&= \lambda_iV_i\,{}^tW_j - \mu_jV_i\,{}^tW_j \\
&= (\lambda_i - \mu_j)V_i\,{}^tW_j
\end{aligned}$$

d) $Pe_i = V_i$ et $Qe_j = W_j$.

$E_{ij} = e_i\,{}^te_j$

$\varphi(E_{ij}) = PE_{ij}\,{}^tQ = Pe_i\,{}^te_j\,{}^tQ = V_i^tW_j$

e) $Ker(\varphi) = \{0\}$ donc φ est un automorphisme qui transforme la base $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ en la base $(V_i\,{}^tW_j)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

f) La base $(V_i\,{}^tW_j)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ est une base de vecteurs propres de d_A donc d_A est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_i - \mu_j$ associées aux vecteurs propres $V_i\,{}^tW_j$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant p$.

Partie II

1°) a) Il est immédiat de vérifier que pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_p^2(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$$

b) Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Alors

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ki}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{p} b_{ki}a_{ik}\right) = tr(BA)$$

c) $tr(P^{-1}AP) = tr((AP)P^{-1}) = tr(A)$

2°) a) Si λ est une valeur propore de M, il existe $x \in \mathbb{K}^p - \{0\}$ vérifiant $Mx = \lambda x$
donc $M^2x = \lambda^2 x = Mx = \lambda x$ soit encore $(\lambda^2 - \lambda)x = 0$.
Ainsi comme $x \neq 0$, $\lambda^2 - \lambda = 0$ donc les seules valeurs propres possibles de M sont 0 et 1.

b) Il est clair que $(M - I_p)Mx = (M^2 - M)x = 0$ donc $Mx \in Ker(M - I_p)$.
De plus $M(-M + I_p)x = (-M^2 + M)x = 0$ donc $x - Mx \in Ker(M)$.
Ainsi $\mathbb{K}^p \subset Ker(M - I_p) + Ker(M)$ et par suite $\mathbb{K}^p = Ker(M - I_p) + Ker(M)$.
Enfin $Ker(M - I_p) \cap Ker(M) = \{0\}$ donc

$$\mathbb{K}^p = Ker(M - I_p) \oplus Ker(M)$$

c) En prenant une base de $\mathbb{K}^p$ constituée de vecteurs de $Ker(M - I_p)$ et de vecteurs de $Ker(M)$, on constate que la matrice de l'application $x \mapsto Mx$ dans cette nouvelle base est $D = diag(1, 1, ..., 1, 0, 0, ..., 0)$ avec r éléments égaux à 1 ($dim(Ker(M - I_p)) = r$) et $p - r$ éléments égaux à 0 ($dim(Ker(M)) = p - r$). Ainsi M est diagonalisable c'est-à-dire qu'il existe P inversible telle que $P^{-1}MP = D$.

d) Ainsi $tr(D) = r = rg(M)$

3°) a) $d(I_p.I_p) = d(I_p) = d(I_p)I_p + I_p d(I_p) = 2d(I_p)$ donc $d(I_p) = 0$.

b) $F(M+N) = \begin{pmatrix} M+N & d(M+N) \\ 0 & M+N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & d(M) \\ 0 & M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N & d(N) \\ 0 & N \end{pmatrix}$ donc

$F(M+N) = F(M) + F(N)$

$F(\lambda M) = \begin{pmatrix} \lambda M & d(\lambda M) \\ 0 & \lambda M \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} M & d(M) \\ 0 & M \end{pmatrix} = \lambda F(M)$

$F(MN) = \begin{pmatrix} MN & d(MN) \\ 0 & MN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} NM & d(M)N + Md(N) \\ 0 & MN \end{pmatrix} = F(M)F(N)$

$F(I_p) = \begin{pmatrix} I_p & d(I_p) \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = I_{2p}$

c) $F(E_{ii}) = F(E_{ij}E_{ji}) = F(E_{ij})F(E_{ji}) = F(E_{ij}E_{jj})F(E_{ij}) = F(E_{ij})F(E_{jj})F(E_{ji})$

$$\begin{aligned} rg(F(E_{ii})) &\leqslant min\big[rg\big(F(E_{ij}), F(E_{jj})\big), rg(F(E_{ji}))\big] \\ &\leqslant min\big[min\big(rg(F(E_{ij})), rg(F(E_{jj}))\big), rg(F(E_{ji}))\big] \\ &\leqslant rg(F(E_{jj})) \end{aligned}$$

et par symétrie $rg(F(E_{jj})) \leqslant rg(F(E_{ii}))$. Ainsi

$$rg(F(E_{ii})) = rg(F(E_{jj}))$$

d) $F(E_{ii}).F(E_{ii}) = F(E_{ii}.E_{ii}) = F(E_{ii})$ donc $F(E_{ii})$ est une matrice de projection.

e) $F(E_{11}) + F(E_{22}) + ... + F(E_{pp}) = F(E_{11} + E_{22} + ... + E_{pp}) = F(I_p) = I_{2p}$
donc

$$rg(I_{2p}) = 2p = tr(I_{2p}) = tr(F(E_{11}) + ... + F(E_{pp}))$$

soit encore

$$rg(I_{2p}) = tr(F(E_{11})) + ... + tr(F(E_{pp})) = p.rg(F(E_{ii})) = pr$$

Donc le rang des projecteurs $F(E_{ii})$ est 2.

4°) a) La dimension de $Im(F(E_{11}))$ vaut 2, on peut donc prendre deux vecteurs (u, v) base de $Im(F(E_{11}))$ vérifiant $F(E_{11})u = u$ et $F(E_{11})v = v$.

b) $F(E_{1k})F(E_{j1})u = F(E_{1k}E_{j1})u = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ u & \text{si } k = j \end{cases}$

De même on a $F(E_{1k})F(E_{j1})v = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ v & \text{si } k = j \end{cases}$

Soit une combinaison linéaire nulle de la forme

$$\lambda_{11}F(E_{11})u + ... + \lambda_{p1}F(E_{p1})u + \mu_{11}F(E_{11})v + ... + \mu_{p1}F(E_{p1})v = 0$$

En composant par $F(E_{1k})$ on obtient

$$\lambda_{k1}u + \mu_{k1}v = 0$$

soit $\lambda_{k1} = \mu_{k1} = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$.

c) $F(M)F(E_{k1})u = F(ME_{k1})u = F\left(\sum_{i=1}^{p} m_{ik}E_{i1}\right)u = \sum_{i=1}^{p} m_{ik}F(E_{i1})u$

$F(M)F(E_{k1})v = \sum_{i=1}^{p} m_{ik}F(E_{i1})v.$

d) Dans la base $\mathscr{B}$, la matrice de l'application $x \mapsto F(M)x$ est la matrice $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$.

donc si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^{2p}$ à la base $\mathscr{B}$ on obtient

$$P^{-1}F(M)P = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

5°) a) $F(M)P = \begin{pmatrix} M & d(M) \\ 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MA + d(M)C & MB + d(M)D \\ MC & MD \end{pmatrix}$

or $F(M)P = PP^{-1}F(M)P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AM & BM \\ CM & DM \end{pmatrix}$

Ainsi $MC = CM$, $MD = DM$, $d(M)C = AM - MA$, $d(M)D = BM - MB$.

b) Comme $MC = CM$ et $MD = DM$ pour tout $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, on en déduit que C et D sont dans C_p.
Ainsi il existe γ et δ dans $\mathbb{K}$ tels que $C = \gamma I_p$ et $D = \delta I_p$.

c) Si $C = D = 0$, $P = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc P n'est pas inversible ($det(P) = 0$) donc soit $\gamma \neq 0$ soit $\delta \neq 0$.
Par exemple $\gamma \neq 0$ donne $d(M) = \dfrac{A}{\gamma}M - M\dfrac{A}{\gamma}$ ce qui donne en posant $X = \dfrac{A}{\gamma}$,

$$\forall M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}),\ d(M) = XM - MX$$