

# EPITA 2007 - mathématiques 1

(durée de l'épreuve : 3 heures)

---

On considère dans ce problème deux fonctions  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  qu'on suppose de classe  $C^1$ .  
On étudie ici un algorithme d'approximation de la solution  $y$  de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) :  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$  qui vérifie la condition  $y(0) = y_0$  où  $y_0 \in \mathbb{C}$ .

Pour obtenir une approximation de  $y(T)$  pour un réel donné  $T \neq 0$ , on introduit un entier  $N \geq 1$  et la subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$  du segment  $[0, T]$ , où  $t_k = \frac{kT}{N}$  ( $0 \leq k \leq N$ ).  
On définit alors une suite finie  $y_0 = y(0), y_1, \dots, y_N$  par les formules suivantes :

$$(1) \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad y_{k+1} = y_k + \frac{T}{N} (a(t_k)y_k + b(t_k)).$$

(On a obtenu celles-ci en remplaçant dans (E)  $y'(t_k)$  par le taux d'accroissement  $\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$ ).

## ■ Partie I

Dans cette partie, on étudie le cas où les deux fonctions  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles.  
On étudie donc la solution  $y$  du problème de Cauchy suivant (avec  $y_0 \in \mathbb{R}$ ) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = a y(t) + b \quad \text{et} \quad y(0) = y_0.$$

Dans ce cas, la suite finie  $y_0 = y(0), y_1, \dots, y_N$  est donnée par les formules suivantes :

$$(2) \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad y_{k+1} = y_k + \frac{T}{N} (a y_k + b).$$

### 1°) Etude de l'algorithme

- Ecrire l'algorithme permettant d'obtenir  $y_N$  quand  $a, b, y_0, T$  et l'entier  $N$  sont donnés.
- Préciser en fonction de  $N$  le nombre global d'opérations  $+, -, \times$  et  $/$  effectuées.

### 2°) Etude d'un cas particulier ( $y'(t) = y(t)$ )

On suppose que  $a = 1$  et  $b = 0$ , donc que l'équation différentielle s'écrit  $y'(t) = y(t)$ .

- Résoudre l'équation différentielle et préciser  $y(T)$  (sachant que  $y(0) = y_0$ ).
- Préciser l'expression de  $y_N$  et montrer que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N = y(T)$ .
- Donner un équivalent de  $y(T) - y_N$  quand  $N$  tend vers  $+\infty$ .

### 3°) Etude du cas général ( $y'(t) = a y(t) + b$ )

On suppose que  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ , donc que l'équation différentielle s'écrit  $y'(t) = a y(t) + b$ .

- Résoudre l'équation différentielle et préciser  $y(T)$  (sachant que  $y(0) = y_0$ ).
- Déterminer  $y_k$  pour  $0 \leq k \leq N$  à l'aide de la suite auxiliaire  $z_k = y_k + \frac{b}{a}$ .
- Préciser l'expression de  $y_N$  et montrer que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N = y(T)$ .
- Donner un équivalent de  $y(T) - y_N$  quand  $N$  tend vers  $+\infty$ .

## ■ Partie II

Dans cette partie, on étudie le cas où les deux fonctions  $a$  et  $b$  sont des constantes complexes. On étudie la solution  $y$  du problème de Cauchy suivant (avec  $y_0 \in \mathbb{C}$ ) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = a y(t) + b \quad \text{et} \quad y(0) = y_0.$$

Les candidats veilleront dans cette partie à ne pas écrire de logarithme de nombres complexes.

4°) *Etude d'un cas particulier* ( $y'(t) = i y(t)$ )

On suppose que  $a = i$  et  $b = 0$ , donc que l'équation différentielle s'écrit  $y'(t) = i y(t)$ .

a) Préciser  $y(T)$  (sachant que  $y(0) = y_0$ ).

b) Préciser le module  $r_N$  du complexe  $1 + i \frac{T}{N}$ , puis déterminer  $\lim_{N \rightarrow +\infty} (r_N)^N$ .

Montrer que le complexe  $1 + i \frac{T}{N}$  admet un argument  $\theta_N$  compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .

Vérifier que  $\theta_N = \text{Arctan}\left(\frac{T}{N}\right)$ , puis déterminer  $\lim_{N \rightarrow +\infty} N \theta_N$ .

c) Préciser l'expression de  $y_N$  et montrer que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N = y(T)$ .

5°) *Un résultat préliminaire*

a) Etablir que  $\frac{1}{N^k} \binom{N}{k} \leq \frac{1}{k!}$  si  $k$  et  $N$  sont deux entiers naturels tels que  $k \leq N$ .

En déduire l'inégalité suivante pour tout nombre complexe  $z$  donné :

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N \right| \leq \sum_{k=0}^N \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{N^k} \binom{N}{k} \right) |z|^k + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}.$$

b) Etablir que  $\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N \right| \leq e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{N}\right)^N$ , et que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N = e^z$ .

6°) *Etude du cas général* ( $y'(t) = a y(t) + b$ )

On suppose que  $a \in \mathbb{C}$  et  $b \in \mathbb{C}$ , et que l'équation différentielle s'écrit  $y'(t) = a y(t) + b$ .

a) Résoudre l'équation différentielle et préciser  $y(T)$  (sachant que  $y(0) = y_0$ ).

(On remarquera que l'équation est équivalente à  $(e^{-at} y(t))' = b e^{-at}$ , et on intégrera).

b) Préciser l'expression de  $y_N$  à l'aide des formules (2) et montrer que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N = y(T)$ .

## ■ Partie III

On revient au cas général et on étudie donc la solution  $y$  du problème de Cauchy suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = a(t) y(t) + b(t) \quad \text{et} \quad y(0) = y_0.$$

Dans ce cas, la suite finie  $y_0 = y(0), y_1, \dots, y_N$  est donnée par les formules précédentes (1).

7°) *Etude du cas où  $a$  est la fonction nulle* ( $y'(t) = b(t)$ )

On suppose que l'équation différentielle se réduit à  $y'(t) = b(t)$ .

a) Préciser à l'aide d'une intégrale l'expression de  $y(T)$  (sachant que  $y(0) = y_0$ ).

b) Montrer à l'aide des formules (1) que  $y_N$  est donné par la relation suivante :

$$y_N = y_0 + \frac{T}{N} \sum_{k=0}^{N-1} b\left(\frac{kT}{N}\right).$$

En reconnaissant une somme de Riemann, en déduire que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N = y(T)$ .

8°) *Etude du cas où  $b$  est la fonction nulle ( $y'(t) = a(t)y(t)$ )*

On suppose que l'équation différentielle se réduit à  $y'(t) = a(t)y(t)$ , avec  $a$  à valeurs réelles.

a) Préciser à l'aide d'une intégrale l'expression de  $y(T)$  (sachant que  $y(0) = y_0$ ).

b) On considère la suite  $(p_N)$  définie pour  $N \geq 1$  par :

$$p_N = \prod_{k=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{T}{N} a\left(\frac{kT}{N}\right) \right).$$

- Etablir, lorsque  $N$  est assez grand, qu'on a :  $\forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \left| \frac{T}{N} a\left(\frac{kT}{N}\right) \right| \leq \frac{1}{2}$ .
  - Etablir l'inégalité  $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$  pour tout nombre réel  $x \geq -\frac{1}{2}$ .
  - En déduire un encadrement de  $\ln(p_N)$  et les limites de  $\ln(p_N)$  et  $p_N$  quand  $N$  tend vers  $+\infty$ .
- c) Préciser l'expression de  $y_N$  à l'aide des formules (1) et montrer que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} y_N = y(T)$ .

9°) *Une majoration préliminaire*

On considère des réels strictement positifs  $\alpha$  et  $\beta$ , et une suite réelle  $(e_k)$  vérifiant  $e_0 = 0$  et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad e_{k+1} \leq (1 + \alpha) e_k + \beta.$$

On lui associe la suite réelle  $(u_k)$  définie par  $u_0 = 0$ , puis par  $u_{k+1} = (1 + \alpha) u_k + \beta$ .

a) Déterminer la limite éventuelle  $L$  de la suite  $(u_k)$ , puis préciser l'expression de  $u_k$ .

b) Etablir l'inégalité  $e_k \leq u_k$  pour tout entier naturel  $k$ , et en déduire qu'on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$e_k \leq \frac{\beta}{\alpha} ((1 + \alpha)^k - 1) \leq \frac{\beta}{\alpha} (e^{k\alpha} - 1).$$

10°) *Convergence de la méthode d'Euler*

On étudie le cas général de l'équation différentielle  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ .

a) Montrer que la solution  $y$  vérifiant  $y(0) = y_0$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Etablir que la solution  $y$  vérifie la relation suivante pour  $0 \leq k < N$  :

$$y(t_{k+1}) = \left( 1 + \frac{T}{N} a(t_k) \right) y(t_k) + \frac{T}{N} b(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t) y''(t) dt.$$

c) Etablir à l'aide de la relation (1) qu'on a alors pour  $0 \leq k < N$  :

$$y(t_{k+1}) - y_{k+1} = \left( 1 + \frac{T}{N} a(t_k) \right) (y(t_k) - y_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t) y''(t) dt.$$

On pose  $A = \max_{|t| \leq |T|} |a(t)|$  et  $M_2 = \max_{|t| \leq |T|} |y''(t)|$ .

En notant  $e_k = |y(t_k) - y_k|$ , en déduire l'inégalité suivante pour  $0 \leq k < N$  :

$$e_{k+1} \leq \left( 1 + \frac{A|T|}{N} \right) e_k + \frac{M_2 T^2}{2N^2}.$$

d) Déduire des résultats précédents une majoration de  $e_N = |y(T) - y_N|$ , puis conclure.