

E.P.I.T.A. 2006

Epreuve de mathématiques 1 (3 heures)

Dans tout ce problème, l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 est muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme euclidienne $\| \cdot \|$ usuels. On se propose de déterminer les groupes d'isométries laissant stables les quadriques de révolution engendrées par rotation d'une droite autour de Oz .

I. Préliminaires

1°) On sait qu'un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 est *orthogonal* s'il conserve la norme euclidienne :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \|f(x)\| = \|x\|.$$

- a) Montrer qu'un endomorphisme orthogonal f est bijectif (et c'est donc un automorphisme).
- b) Montrer que les automorphismes orthogonaux de \mathbb{R}^3 forment un groupe, noté $O(\mathbb{R}^3)$.
- c) Etablir qu'un automorphisme f de \mathbb{R}^3 est orthogonal si et seulement s'il vérifie :

$$(2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

(On pourra exprimer $\|f(x+y)\|^2$ en faisant intervenir le produit scalaire $\langle f(x), f(y) \rangle$).

- d) Etablir qu'un automorphisme f de \mathbb{R}^3 est orthogonal si et seulement s'il vérifie :

$$(3) \quad \forall x, z \in \mathbb{R}^3, \quad \langle f(x), z \rangle = \langle x, f^{-1}(z) \rangle.$$

II. Groupes d'automorphismes orthogonaux de \mathbb{R}^3

L'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 est orienté et rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ (qui est la base orthonormale directe définie par $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$). Pour tout nombre réel θ , on introduit alors le vecteur unitaire $u(\theta) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$. On conviendra d'appeler *demi-tour d'axe D* toute rotation de mesure π autour d'une droite D .

2°) On considère pour $\theta \in \mathbb{R}$ les endomorphismes f_θ et g de \mathbb{R}^3 dont les matrices dans \mathcal{B} sont :

$$F_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Vérifier que f_θ et g sont des automorphismes orthogonaux directs, donc des rotations.
Préciser l'axe et la mesure de f_θ et de g .
- b) Préciser la matrice, les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f_\theta \circ g$.
Vérifier que $f_\theta \circ g$ est diagonalisable et que c'est un demi-tour dont on précisera l'axe.
- c) On pose $r_1 = -g$, $r_2 = -f_\pi \circ g$, $r_3 = -f_\pi$.
Préciser les matrices de r_1, r_2, r_3 , puis reconnaître leur nature géométrique.

3°) On convient de noter :

- G_+ l'ensemble constitué des automorphismes f_θ et $f_\theta \circ g$ où θ décrit \mathbb{R} ,
- G_- l'ensemble constitué des automorphismes $-f_\theta$ et $-f_\theta \circ g$ où θ décrit \mathbb{R} :

$$G_+ = \{f_\theta, f_\theta \circ g \mid \theta \in \mathbb{R}\} \quad ; \quad G_- = \{-f_\theta, -f_\theta \circ g \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

a) Reconnaître g^{-1} , $f_\alpha \circ f_\beta$ et $g \circ f_\alpha \circ g$ (on pourra d'abord expliciter leurs matrices).

En déduire le nombre réel θ tel que $g \circ f_\alpha = f_\theta \circ g$.

b) En déduire que G_+ est un sous-groupe du groupe orthogonal $O(\mathbb{R}^3)$, qui est constitué des rotations d'axe Vect(e_3) et des demi-tours d'axe $u(\alpha)$ où α est un réel quelconque.

c) Démontrer que $G = G_+ \cup G_-$ est un groupe, et que celui-ci contient aussi r_1, r_2, r_3 .

III. Groupes d'isométries de quadriques de révolution

On considère deux réels a et m avec $a \geq 0$ et on note \mathcal{Q} la surface engendrée par la rotation autour de $Oz = \text{Vect}(e_3)$ de la droite \mathcal{D} passant par $A(a, 0, 0)$ et dirigée par $v(0, m, 1)$.

4°) On désigne par $M(z)$ le point de cote z de la droite \mathcal{D} , et par $M(z, \theta)$ le point déduit de $M(z)$ par la rotation de mesure θ autour de l'axe Oz orienté par e_3 .

a) Déterminer les coordonnées du point $M(z)$, puis du point $M(z, \theta)$.

b) Etablir qu'une équation cartésienne de l'ensemble \mathcal{Q} des points $M(z, \theta)$ pour $(z, \theta) \in \mathbb{R}^2$ est :

$$x^2 + y^2 = m^2 z^2 + a^2.$$

c) On suppose $a > 0$. Reconnaître et représenter en perspective \mathcal{Q} pour $m = 0$ et $m \neq 0$.

d) On suppose $a = 0$. Reconnaître et représenter en perspective \mathcal{Q} pour $m = 0$ et $m \neq 0$.

5°) On note \mathcal{G} l'ensemble des automorphismes orthogonaux φ laissant stable \mathcal{Q} , c'est à dire :

$$\mathcal{G} = \{\varphi \in O(\mathbb{R}^3) \mid \varphi(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{Q}\}.$$

a) Montrer que les images par g et $-g$ d'un point $M(x, y, z)$ de \mathcal{Q} appartiennent à \mathcal{Q} .

Montrer que les images par f_θ et $-f_\theta$ d'un point $M(x, y, z)$ de \mathcal{Q} appartiennent à \mathcal{Q} .

b) En déduire que \mathcal{G} est stable par composition et qu'il contient $G = G_+ \cup G_-$.

6°) Dans cette question, on détermine le groupe \mathcal{G} pour $a > 0$.

On désigne ici par \mathcal{S} la sphère de centre O et de rayon a et par φ un élément de \mathcal{G} .

a) Que dire de l'image de \mathcal{S} par φ ?

b) Déterminer l'intersection \mathcal{C} des ensembles \mathcal{Q} et \mathcal{S} , et montrer que $\varphi(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

En déduire, qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(e_1) = u(\theta)$ et $\varphi(e_2) = \varepsilon u(\theta + \frac{\pi}{2})$, où $\varepsilon = \pm 1$.

Etablir alors que $\varphi(e_3)$ est égal à e_3 ou $-e_3$.

c) On suppose dans cette sous-question que $\varphi(e_3) = e_3$.

Déterminer les matrices dans la base \mathcal{B} de φ , puis de $f_{-\theta} \circ \varphi$ en fonction de $\varepsilon = \pm 1$.

En déduire que φ appartient à une partie de G formée de deux éléments qu'on précisera.

d) On suppose dans cette sous-question que $\varphi(e_3) = -e_3$.

En exploitant $\varphi \circ r_3$, établir que φ appartient à une partie de G formée de deux éléments.

e) Déduire de l'ensemble des résultats précédents que $\mathcal{G} = G$.

7°) Dans cette question, on détermine le groupe \mathcal{G} pour $a = 0$ et $m \neq 0$.

On désigne ici par \mathcal{S} la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{1+m^2}$ et par φ un élément de \mathcal{G} .

a) Déterminer l'intersection \mathcal{J} des ensembles \mathcal{Q} et \mathcal{S} , et montrer que $\varphi(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$.

En déduire, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, qu'il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(mu(\theta) + e_3) = mu(\theta') \pm e_3$,

b) Vérifier que $\langle \varphi(mu(\theta) + e_3), e_3 \rangle^2 = 1$ et $\langle \varphi(mu(\theta) - e_3), e_3 \rangle^2 = 1$.

En déduire par différence que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \langle \varphi(e_3), e_3 \rangle \langle \varphi(u(\theta)), e_3 \rangle = 0.$$

c) On suppose dans cette sous-question que $\langle \varphi(e_3), e_3 \rangle = 0$.

Etablir que $\langle e_3, \varphi^{-1}(e_3) \rangle = 0$, puis qu'il existe un réel α tel que $\varphi^{-1}(e_3) = u(\alpha)$.

Calculer $\langle \varphi(mu(\alpha + \frac{\pi}{2}) + e_3), e_3 \rangle$ et en déduire une contradiction.

d) Démontrer à l'aide des questions précédentes que $\langle \varphi(u(\theta)), e_3 \rangle = 0$ pour tout réel θ .

En déduire, qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(e_1) = u(\theta)$ et $\varphi(e_2) = \varepsilon u(\theta + \frac{\pi}{2})$, où $\varepsilon = \pm 1$.

Etablir alors que $\varphi(e_3)$ est égal à e_3 ou $-e_3$.

e) Conclure que $\mathcal{G} = G$.
