
Corrigé du sujet de Mathématiques I

Concours CRITECH 2006

Ainsi, f est injective, donc bijective (dimension finite).

c) La conservation du produit scalaire implique celle de la norme. Inversement, on a :

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2}(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

d) En faisant $z = f(y)$, donc $y = f^{-1}(z)$, on passe de (2) à (3) et inversement.

2)a) F_θ et G sont des matrices orthogonales directes (on a ${}^tMM = I$ avec $\det M = 1$). Ce sont donc des rotations.

F_θ est la rotation de mesure θ autour de e_3 .

G est le demi-tour d'axe Ox .

b)

$$F_\theta G = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme $\det(F_\theta G - XI_3) = (1-X)(X+1)^2$, les valeurs propres sont 1 et -1 à l'ordre 2 et :

. le sous espace propre associé à 1 est la droite $\text{Vect}(u(\frac{\theta}{2}))$,

. le sous espace propre associé à -1 est le plan $x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2} = 0$.

$f_\theta \circ g$ est aussi diagonalisable et c'est le demi-tour d'axe $u(\frac{\theta}{2})$.

c)

$$R_1 = -G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la réflexion par rapport à yOz . De même, r_2 et r_3 sont les réflexions par rapport à zOx et xOy .

3)a) On vérifie matriciellement que $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ et $g \circ f_\alpha \circ g = f_{-\alpha}$ et on a $g^2 = Id$ (ou $g^{-1} = g$).

b) Comme $f_\theta, g \in O(\mathbb{R}^3)$, on a $G_+ \subset O(\mathbb{R}^3)$. On établit donc que G_+ est un sous-groupe de $O(\mathbb{R}^3)$:

. G_+ est stable par produit car :

$$f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}; f_\alpha \circ (f_\beta \circ g) = f_{\alpha+\beta} \circ g;$$

$$(f_\alpha \circ g) \circ f_\beta = f_\alpha \circ f_{-\beta} \circ g = f_{\alpha-\beta} \circ g;$$

$$(f_\alpha \circ g) \circ (f_\beta \circ g) = f_\alpha \circ f_{-\beta} \circ g \circ g = f_{\alpha-\beta};$$

. G_+ est stable par passage à l'inverse car :

$$(f_\theta)^{-1} = f_{-\theta}; (f_\theta \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f_{-\theta} = g \circ f_{-\theta} = f_\theta \circ g$$

est aussi).

De même, on vérifie que $G = G_+ \cup G_-$ est un sous-groupe de $O(\mathbb{R}^3)$.

4)a) Les points de \mathcal{D} s'écrivent $A + \mathbb{R}V$ ou $(a, 0, 0) + \lambda(0, m, 1)$. Celui d'ordonnée z est $M(z)$ (a, mz, z). Et $M(z, \theta) = f_\theta(M(z))$ a pour coordonnées :

$$M(z, \theta)(x = a \cos \theta - mz \sin \theta ; y = a \sin \theta + mz \cos \theta ; z)$$

b) Un point $M(x, y, z)$ appartient à \mathcal{Q} ssi :

$$\exists z, \theta : \quad \cos \theta = \frac{ax + mzy}{a^2 + m^2 z^2} \quad \sin \theta = \frac{ay - mzx}{a^2 + m^2 z^2}$$

$$\iff (ax + mzy)^2 + (ay - mzx)^2 = (a^2 + m^2 z^2)^2$$

$$\iff x^2 + y^2 = m^2 z^2 + a^2$$

c) Pour $a > 0$, c'est un hyperboloïde à une nappe (i.e. : un cylindre si $m = 0$).

d) Pour $a = 0$, c'est un cône (l'axe $0z$ si $m = 0$).

5)a) Si $M(x, y, z)$, on a $f_\theta(M)(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$.

On a $(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 = x^2 + y^2 = m^2 z^2 + a^2$ si $M \in \mathcal{Q}$.

Ainsi, $f_\theta(M) \in \mathcal{Q}$.

Même chose avec $-f_\theta$, puis avec g et $-g$.

b) Si $\varphi, \Psi \in \mathcal{G}$, on a $\varphi \circ \Psi(\mathcal{Q}) \subset \varphi(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{Q}$. Et comme $\pm f_\theta, \pm g$ appartiennent à \mathcal{G} , \mathcal{G} contient $\pm f_\theta$ et $\pm f_\theta \circ g$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, donc $G_+ \cup G_- \subset \mathcal{G}$.

6)a) Puisque φ est orthogonal, on a $\|\varphi(x)\| = \|x\|$. Ainsi, φ laisse stable la sphère $\mathcal{S} = \mathcal{S}(0, a)$.

b) $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{S}$ est le cercle $x^2 + y^2 = a^2$ du plan xOy , qui est donc stable par $\varphi \in \mathcal{G}$.

Comme $e_1 \in \mathcal{C}$, il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(e_1) = u(\theta)$.

Et comme φ est un automorphisme orthogonal, il transforme le vecteur unitaire orthogonal e_2 en un vecteur unitaire orthogonal $\pm u(\theta + \frac{\pi}{2})$. Comme e_3 est unitaire et orthogonal à e_1, e_2 , $\varphi(e_3)$ est unitaire et orthogonal à $u(\theta), \pm u(\theta + \frac{\pi}{2})$.

Donc $\varphi(e_3) = \pm e_3$.

c)

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\varepsilon \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \varepsilon \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_{-\theta} M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $\varepsilon = 1$: $M(\varphi) = F_\theta$ et $\varphi = f_\theta$,

Si $\varepsilon = -1$: $M(\varphi) = F_\theta R_2$ et $\varphi = f_\theta \circ r_2 = -f_{\theta+\pi} \circ g$.

$$\text{Donc } \begin{cases} \varphi \circ r_3 = f_\theta, & \text{où } \varphi = f_\theta \circ r_3 = -f_{\theta+\pi} \\ \varphi \circ r_3 = f_\theta \circ r_2 \circ r_3 = f_\theta \circ g \end{cases}$$

e) Finalement toute isométrie vectorielle laissant stable \mathcal{Q} appartient à $G = G_+ \cup G_-$. Comme on a déjà $G_+ \cup G_- \subset \mathcal{G}$, on a $\mathcal{G} = \mathcal{Q}$.

7)a) $\mathcal{J} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{S}$ est ici la réunion des deux cercles d'équation $x^2 + y^2 = m^2$ des plans $z = \pm 1$.

Un élément $\varphi \in \mathcal{G}$ laisse stable \mathcal{Q} et \mathcal{S} , donc \mathcal{J} .

b) Comme $m u(\theta) + e_3 \in \mathcal{J}$, $\varphi(m u(\theta) + e_3) = m\varphi(u(\theta)) + \varphi(e_3)$ appartient à \mathcal{J} et s'écrit $m u(\theta') \pm e_3$.

$$\text{Donc } \langle \varphi(m u(\theta) + e_3), e_3 \rangle = \langle m u(\theta') \pm e_3, e_3 \rangle = \pm 1.$$

Idem avec $\langle \varphi(m u(\theta) - e_3), e_3 \rangle = \pm 1$, d'où :

$$\langle \varphi(m u(\theta) + e_3), e_3 \rangle^2 - \langle \varphi(m u(\theta) - e_3), e_3 \rangle^2 = 0 \iff \langle \varphi(u(\theta)), e_3 \rangle \langle \varphi(e_3), e_3 \rangle = 0$$

c) Si $\langle \varphi(e_3), e_3 \rangle = 0$, on a $\langle e_3, \varphi^{-1}(e_3) \rangle = 0$.

Donc $\varphi^{-1}(e_3) = u(\alpha)$ car c'est un vecteur unitaire et orthogonal à e_3 .

Alors,

$$\begin{aligned} & \langle \varphi(m u(\alpha + \frac{\pi}{2}) + e_3), e_3 \rangle \\ &= \langle m u(\alpha + \frac{\pi}{2}) + e_3, \varphi^{-1}(e_3) \rangle \\ &= \langle m u(\alpha + \frac{\pi}{2}) + e_3, u(\alpha) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Contradiction car on devrait trouver ± 1 d'après b).

d) Donc $\langle \varphi(u(\theta)), e_3 \rangle = 0$

et $\varphi(e_1) = u(\theta)$

donc $\varphi(e_2) = \pm u(\theta + \frac{\pi}{2})$

donc $\varphi(e_3) = \pm e_3$

e) On conclut alors comme au 6).