E.P.I.T.A. - Concours 2005

durée 3h

On se propose dans ce problème d'étudier la série dont le terme général u_n est l'inverse du coefficient binomial noté $\binom{2n}{n}$ ou C_{2n}^n, c'est à dire $u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$, ou $\frac{1}{C_{2n}^n}$.

1°) *Convergence et algorithme de calcul approché de la somme* $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Former le rapport u_{n+1} / u_n, et déduire de son expression :

a) la nature de la série de terme général u_n.

b) un algorithme de calcul de la somme partielle $U_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ où N est donné.

2°) *Une majoration de la somme de la série et de l'erreur* $U - U_N$

a) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$.

b) Comparer, pour $1 \leq k \leq n$, les nombres $\binom{2n}{k-1}$ et $\binom{2n}{k}$.

c) En déduire l'inégalité $4^n \leq (2n+1)\binom{2n}{n}$, puis l'inégalité $u_n \leq \frac{2n+1}{4^n}$.

d) Préciser les sommes des séries suivantes, où N est donné, pour $-1 < x < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n\, x^n \quad ; \quad \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \quad ; \quad \sum_{n=N+1}^{+\infty} n\, x^n .$$

e) En déduire un majorant de la somme $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, puis de la différence $U - U_N$.
Comment suffit-il de choisir N pour avoir $U - U_N < 10^{-3}$?

Afin de calculer la somme U de la série précédente, on introduit l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x(x-4)\, y' + (x+2)\, y = 2.$$

3°) *Recherche de solutions de (E) développables en série entière*

a) On suppose qu'il existe une solution de l'équation s'écrivant sous la forme suivante, avec un rayon de convergence $R > 0$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n .$$

A quelle condition nécessaire et suffisante sur a_0 et la suite (a_n) cette fonction S est-elle solution de l'équation différentielle (E) sur $]-R, R[$?

b) On considère inversement la suite réelle (a_n) définie par $a_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\,(2\,n-1)\,a_n = n\,a_{n-1}\,.$$

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n\, x^n$, et en déduire que sa somme S est solution de l'équation différentielle (E) sur $]-R,\, R[$.

c) Exprimer a_n en fonction de u_n.

4°) *Résolution de l'équation différentielle (E) sur]0, 4[*

a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{x+2}{x(x-4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-4}.$$

En déduire toutes les solutions de l'équation homogène $x(x-4)\,y' + (x+2)\,y = 0$.

b) On cherche les solutions de (E) sur $]0, 4[$ sous la forme suivante :

$$y = \sqrt{\frac{x}{4-x}}\;\frac{k(x)}{x-4}.$$

Déterminer k' pour que y soit solution de E.

En déduire k en posant dans l'intégrale $t = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$.

c) En déduire que les solutions de (E) sur $]0, 4[$ s'expriment comme suit (avec $C \in \mathbb{R}$) :

$$y = \frac{4}{4-x}\left(1 + \sqrt{\frac{x}{4-x}}\ \mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{x}{4-x}} + C\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right).$$

(On rappelle la relation $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ valable pour tout réel $x > 0$).

5°) *Expression de la somme* $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

a) Préciser le développement en série entière de la fonction Arctan.

En déduire une suite (b_n) telle que soit réalisée l'égalité suivante pour $0 \le x < 1$:

$$\sqrt{x}\ \mathrm{Arctan}\sqrt{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, x^n.$$

En déduire que la fonction $x \longrightarrow \sqrt{x}\ \mathrm{Arctan}\sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

Préciser la valeur de sa dérivée en 0.

b) En déduire que la solution de (E) obtenue pour $C = 0$ est de classe C^∞ sur $[0, 4[$.

Préciser sa valeur en 0 et celle de sa dérivée.

c) Quelles solutions de (E) sur $]0, 4[$ se prolongent-elles en solutions sur $[0, 4[$?

d) En déduire la somme $S(x)$ sur $[0, 4[$ à l'aide des fonctions usuelles.

e) Déterminer alors la valeur de la somme $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

6°) *Expression de la somme* $V = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, u_n$

a) Déterminer l'expression des solutions de (E) sur $]-4, 0[$.

b) Quelles solutions de (E) sur $]-4, 0[$ se prolongent-elles en solutions sur $]-4, 0]$?

c) Déterminer alors la valeur de la somme $V = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, u_n$.

***