

**EPREUVE d'OPTION de PHYSIQUE
CORRIGE**

I. Oscillateur harmonique :

1) Oscillations libres :

a) La liaison est sans frottements : la réaction du sol est opposée au poids.
En dehors de ces 2 forces la masse est soumise :

- aux tensions des 2 ressorts : $-kx\vec{u}_x$

- à la loi de type visqueux : $-\lambda\vec{v}$

La 3^e loi de Newton s'écrit : $m\ddot{x} = -2kx - \lambda\dot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

b) L'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 + \frac{\lambda}{m}r + \omega_0^2 = 0$$

L'oscillateur est en régime critique si le discriminant de cette équation est nul :

$$\Delta = \frac{\lambda^2}{m^2} - 4\omega_0^2. \text{ On a donc ce régime pour } \lambda = \lambda_c, \text{ tel que : } \frac{\lambda^2}{m^2} - 4\omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_c = 2m\omega_0 \quad (\lambda \text{ est positif}).$$

c) On pose $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda_c}$, soit : $\lambda = \alpha\lambda_c = 2m\omega_0\alpha$. Dans ces conditions, l'équation

différentielle s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\alpha\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

d) Pour $\alpha = 1$, on est en régime critique : la solution générale s'écrit :

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

$$\dot{x} = [B - \omega_0(A + Bt)]e^{-\omega_0 t}$$

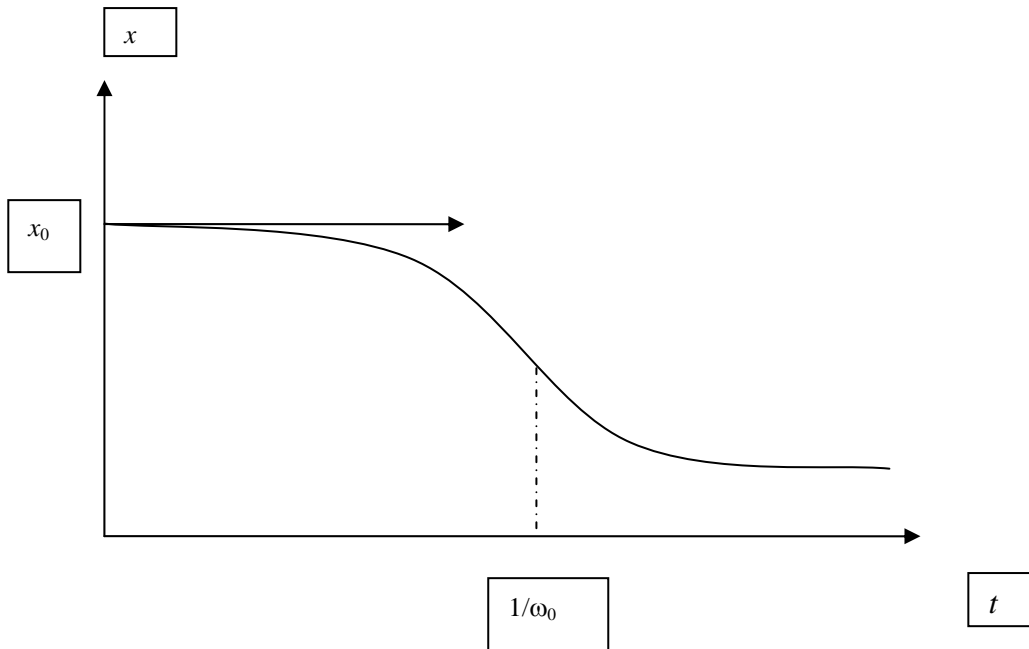
$$\text{à } t = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \text{ soit : } x_0 = A \\ \dot{x} = 0 \text{ soit : } B - \omega_0 A = 0 \end{array} \right. \quad B = \omega_0 A$$

d'ou l'expression de x :

$$x = x_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$

sa dérivée $\dot{x} = -\omega_0^2 x_0 t e^{-\omega_0 t}$ est négative ; x est monotone et décroissante.

Sa dérivée seconde : $\ddot{x} = \omega_0^2 x_0 t e^{-\omega_0 t} (\omega_0 t - 1)$ s'annule en changeant de signe pour $t = \frac{1}{\omega_0}$: il y a un point d'inflexion. On en déduit l'allure de la courbe ci-dessous :



2) Utilisation en accéléromètre

Le référentiel d'étude, lié au bâti du dispositif, n'est plus galiléen : il est en translation d'accélération

$$\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_x$$

On en déduit : - L'accélération d'entraînement : $\vec{a}_e = -\Gamma \vec{u}_x$

- L'accélération de coriolis $\vec{a}_c = \vec{0}$

On reprend l'étude précédente en ajoutant au bilan des forces, la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{ie} = -m\Gamma \vec{u}_x$$

L'équation différentielle du mouvement devient donc : $\ddot{x} + 2\alpha\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = -\Gamma$ et sa solution générale :

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} - \frac{\Gamma}{\omega_0^2}$$

$$\dot{x} = e^{-\omega_0 t} (B - \omega_0 A - \omega_0 Bt)$$

à $t = 0$: $x = 0$ et $\dot{x} = 0$ soit :

$$A = \frac{\Gamma}{\omega_0^2} \text{ et } B = \omega_0 A$$

La solution s'écrit donc :

$$x = \frac{\Gamma}{\omega_0^2} [(1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} - 1]$$

A valeur asymptotique $x_1 = -\frac{\Gamma}{\omega_0^2}$ donne l'élongation à la fin du transitoire : elle permet de mesurer Γ .

C'est au régime critique que cette valeur est atteinte le plus rapidement : il faut donc se placer à ce régime pour que le temps de réponse soit le plus faible possible.

II. Oscillations d'un électron atomique :

1) Le système a la symétrie sphérique, le potentiel ne dépend que de r , et les équipotentielles sont des sphères centrées en O . \vec{E} , normal aux équipotentielles est radial, et son module ne dépend que de r :

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

Soit (Σ) une sphère de centre O et de rayon r quelconque : le flux de \vec{E} à travers (Σ) s'écrit :

$$\Phi = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oiint_{(\Sigma)} E \, ds = E \oiint_{(\Sigma)} ds = 4\pi r^2 E$$

Si $r > R$: la charge intérieure est e . D'après le théorème de Gauss : $\Phi = \frac{e}{\epsilon_0}$ soit

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Si $r < R$: la charge intérieure est celle contenue dans la sphère de rayon r . La charge e étant uniformément

répartie : $q_{\text{int}} = e \frac{r^3}{R^3}$ on en déduit par application du théorème de Gauss :

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{u}_r$$

2) $\vec{E} = -\text{grad}(V)$ est équivalent à : $dV = \vec{E} \cdot \vec{dl}$, soit $dV = E \cdot dr$ puisque \vec{E} est radial.

A l'extérieur : $r > R$: $V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}$. Par convention, $V = 0$ à l'infini :

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

A l'intérieur : $r < R$: $V = -\frac{er^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + K$ Il y a continuité du potentiel en $r = R$

$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 R} + K ; \quad K = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$V = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 R} \left[3 - \frac{r^2}{R^2} \right]$$

3) En $r = 0$, le potentiel s'écrit : $V_0 = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R}$

$$R = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 V_0}$$

A.N : $R = 1.35 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ C'est bien l'ordre de grandeur d'un rayon atomique.

4) À la distance $r = 0$, l'électron est soumis à la force : $\vec{F}_e = -e\vec{E} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r\vec{u}_r$

La 3^e loi de Newton s'écrit alors $m \ddot{\vec{r}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}$ \vec{r} est solution de l'équation

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} = \vec{0}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega_0^2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}$$

5) A.N :

$$\omega_0 = 1.02 \cdot 10^{16} \text{ rds}^{-1}$$

6) a) On ajoute au bilan des forces, la force $-e\vec{E}$ exercée par un champ appliqué : l'équation différentielle devient :

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$

b) En régime forcé : $\underline{\vec{v}} = i\omega \underline{\vec{r}}$ $\underline{\ddot{r}} = i\omega \underline{\vec{r}}$ dans ces conditions, l'équation différentielle s'écrit : $i\omega \underline{\vec{v}} + \frac{\omega_0^2}{i\omega} \underline{\vec{v}} = -\frac{e\vec{E}}{m}$

$$\underline{\vec{v}} = -\frac{i\omega e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \vec{E}$$

c) La densité de charge des porteurs est : $-Ne$, et $\underline{\vec{j}} = -Ne \underline{\vec{v}}$

On en déduit : $\vec{j} = \frac{i\omega Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}$ soit, avec $\varepsilon_0 \omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m}$:

$$\vec{j} = \frac{i\varepsilon_0 \omega \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}$$

et la conductivité du milieu :

$$\sigma = \frac{i\varepsilon_0 \omega \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

III. Propagation d'une onde dans le milieu :

1) Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{div} \vec{E} = 0 \\ \text{rot} \vec{E} = 0 = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{rot} \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$2) \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{div}} \vec{E}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} = -\overrightarrow{\Delta} \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$3) \overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \Delta \vec{E} \quad \vec{u}_x = -k^2 \vec{E}$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \quad \mu_0 \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\omega^2 \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}$$

En respectant ces valeurs dans l'équation de propagation, on obtient l'équation de dispersion :

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\omega^2 \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0.$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + \frac{\omega^2 \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$$

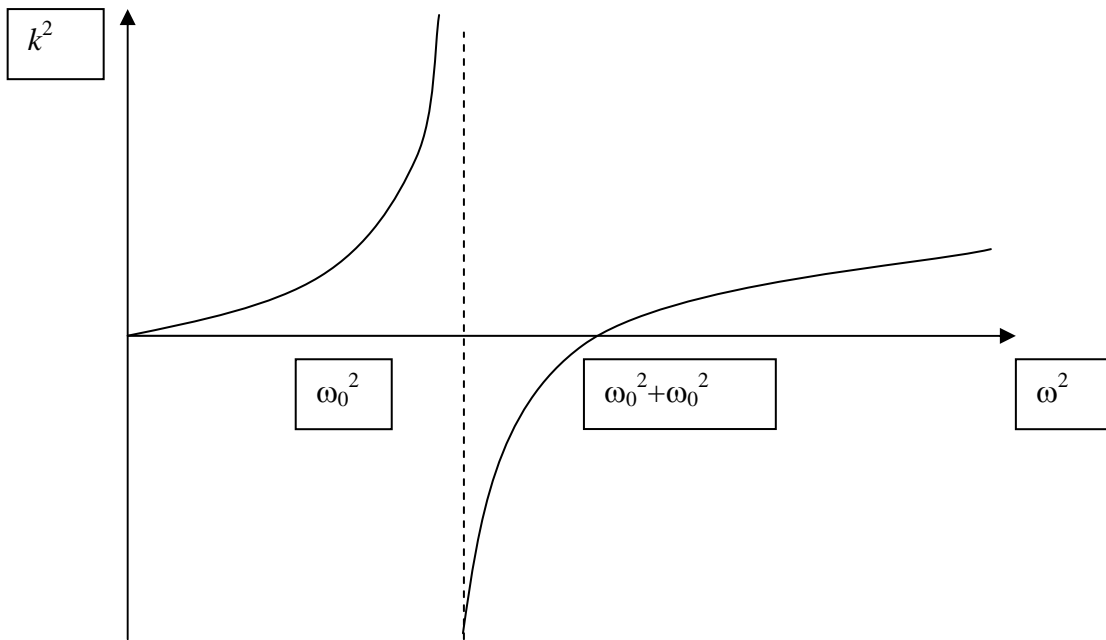
$$4) \frac{dk^2}{d\omega^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^2 \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} > 0 \quad k^2 \text{ est toujours croissant.}$$

$$k^2 = 0 \text{ pour } \omega^2 = 0 \text{ et } \omega^2 = \omega_0^2 + \omega_p^2$$

Si $\omega \rightarrow \omega_0^-$: $k^2 \rightarrow +\infty$.

Si $\omega \rightarrow \omega_0^+$: $k^2 \rightarrow -\infty$.

On en déduit la courbe. Il y a propagation si k est réel, donc si $k^2 > 0$, soit pour : $\begin{cases} \omega < \omega_0^2 \\ \omega > \omega_0^2 + \omega_p^2 \end{cases}$ entre ces 2 valeurs, k est imaginaire pur : on a une onde évanescente.



5) Si $k^2 > 0$:

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2}}}$$

$$n = \frac{c}{v_\varphi} = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\omega_R = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ rd/s}$$

$$\omega_{vi} = 4,7 \cdot 10^{15} \text{ rd/s}$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll 1.$$

n s'écrit :

$$n = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \approx \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \times \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\text{avec } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} :$$

$$n = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{2\pi c}{\lambda^2}}$$

$$A = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$B = \frac{2\pi c \omega_p^2}{\omega_0^4}$$