

**EPREUVE COMMUNE de MATHÉMATIQUES**  
**CORRIGE**

1)

$$a) u_1(x) = \int_0^x (x-t) dt = \frac{x^2}{2}, u_2(x) = \frac{x^4}{4!}, u_3(x) = \frac{x^6}{6!}$$

on prouve par récurrence que  $u_n(x) = \frac{x^{2n}}{2n!}$

$$b) U(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} = \cosh x.$$

$$c) V(x) = \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = \cos x.$$

d) Comme  $\int_0^x (x-t) \cosh t dt = \int_0^x sht dt$  (intégration par parties) =  $\cosh x - 1$ ,  $U$  est solution de (2).

Comme  $\int_0^x (t-x) \cos t dt = -\int_0^x \sin t dt = \cos x - 1$ ,  $V$  est solution de (3).

2)

a) On démontre par récurrence que  $u_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  et donc  $U(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x$ .

b) On obtient  $V(x) = \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$ .

c) Comme  $\int_0^x (x-t) \sinh t dt = [(x-t) \cosh t]_0^x + \int_0^x \cosh t dt = -x + \sinh x$ ,

on vérifie que  $U$  est solution de (4).

De même

$\sin x - \int_0^x (t-x) \sin t dt = \sin x + [(t-x) \cos t]_0^x - \int_0^x \cos t dt = \sin x + x - \sin x = x$  et  $V$  est solution de (5).

3)

b) en appliquant l'égalité de Taylor avec reste intégral, on obtient :

$$u_{n+1}(x) = u_{n+1}(0) + \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} u_{n+1}^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} u_{n+1}^{(n+1)}(t) dt \text{ (si } u_{n+1} \in C^{n+1}[0,1]) \text{) or}$$

$u_{n+1}'(x) = \lambda u_n(x), u_{n+1}''(x) = \lambda^2 u_{n-1}(x), \dots, u_{n+1}^{(n+1)}(x) = \lambda^{n+1} f(x)$  ce qui assure que  $u_{n+1} \in C^{n+1}[0,1]$  et donne  $u_{n+1}^{(k)}(0)$  pour  $0 \leq k \leq n$ .

On obtient 
$$\underline{u_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{\lambda^{n+1}(x-t)^n}{n!} f(t) dt.}$$

c) Comme  $U(x) = f(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \lambda^{n+1} \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt, .$

la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)$  converge normalement sur le segment  $[0, x]$  puisque

$$\left| \lambda^{n+1} \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) \right| \leq \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \text{ et l'on a donc}$$

$$U(x) = f(x) + \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} \frac{(x-t)^n}{n!} \right) f(t) dt = \underline{f(x) + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t) dt.}$$

d) Pour vérifier que  $U$  est solution de l'équation (6) calculons

$$\begin{aligned} \int_0^x |U|(t) dt &= \int_0^x f(t) dt + \int_0^x \lambda e^{\lambda t} \left( \int_0^t e^{-\lambda u} f(u) du \right) dt \\ &= \int_0^x f(t) dt + \left[ e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda u} f(u) du \right]_0^x - \int_0^x e^{\lambda t} e^{-\lambda t} f(t) dt \\ &= e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda u} f(u) du \end{aligned}$$

ce qui donne :  $U(x) - \lambda \int_0^x U(t) dt = f(x)$

e) Remarquons que si  $u : [0,1] \rightarrow R$  est une fonction continue en posant  $U : [0,1] \rightarrow R$  où

$U(x) = \int_0^x u(t) dt$  on obtient une fonction de classe  $C^1$  et si  $u$  vérifie (6) alors  $U$  vérifie

$U'(x) - \lambda U(x) = f(x)$  (Il est équivalent de dire que  $u \in C^0[0,1]$  vérifie (6) et

$U : x \rightarrow \int_0^x u(t) dt \in C^1[0,1]$  vérifie l'équation  $U' - \lambda U = f$ ).

$U' - \lambda U = f$  équivaut à  $(e^{-\lambda x} U(x))' = f(x) e^{-\lambda x}$  ou encore  $U(x) = e^{+\lambda x} \int_0^x f(t) e^{-\lambda t} dt + U_0$ , ce

qui donne  $u(x) = U'(x) = \boxed{f(x) + \lambda e^{+\lambda x} \int_0^x f(t) e^{-\lambda t} dt = u(x)}$  sur  $[0,1]$ .

4)

a) Il est immédiat que si

$$|u_n(x)| \leq M \frac{(Kx)^n}{n!}, |u_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x k(x,t) u_n(t) dt \right| \leq \int_0^x |k(x,t)| |u_n(t)| dt$$

$$\leq \int_0^x K^{n+1} \cdot M \cdot \frac{t^n}{n!} dt = M \frac{K^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \text{ et comme } |u_0(x)| \leq M \text{ la propriété est établie.}$$

b) La série  $x \rightarrow \sum u_n(x)$  converge normalement sur  $[0,1]$  puisque  $|u_n(x)| \leq M \frac{K^n}{n!}$  sur  $[0,1]$ .

La somme  $U$  de cette série est continue (comme somme d'une série normalement convergente de fonctions continues).

c) Calculons  $\int_0^x k(x,t) \left( \sum_{i=0}^{+\infty} u_i(t) \right) dt = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^x k(x,t) u_i(t) dt$  (la convergence de la série est normale sur le segment  $[0, x]$ ) et  $\int_0^x k(x,t) U(t) dt = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{n+1}(x) = U(x) - f(x)$ , ce qui prouve que  $U$  est solution de (1).

d) Immédiat.

e) Il est clair que  $|d(x)| \leq \int_0^x KD dt = KD \cdot x$ . et que si  $|d(x)| \leq D \frac{(Kx)^n}{n!}$  sur  $[0,1]$  alors

$$|d(x)| \leq D \int_0^x \frac{K^{n+1}}{n!} t^n dt = D \frac{K^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ ce qui prouve que } \|d\|_\infty \leq D \frac{K^n}{n!} \text{ et ceci pour tout } n \text{ donc } \|d\|_\infty = 0 \text{ et donc } u_1 = u_2 \text{ sur } [0,1]$$

f) On établit par récurrence que la suite  $(u_n)$  vérifiant  $u_0 = x^2$  et  $u_{n+1}(x) = \int_0^x (x-t)u_n(t) dt$  vaut :

$$u_n : x \propto 2 \times \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n+2} \text{ et donc la solution de (7) vaut :}$$

$$x \rightarrow 2 \sum_0^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = 2(\cosh x - 1).$$

Pour l'équation (8), on trouve  $u_n : x \rightarrow (-1)^n 2 \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$  ce qui donne  $U(x) = -2(\cos x - 1)$ .

5)

a) On suppose que  $y \in C^2[0,1]$  et vérifie  $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$ .

$$\begin{aligned} \text{Si } y''(x) - \int_0^x (a(x) + (x-t)b(x)) y''(t) dt \\ = y''(x) - (a(x) + xb(x))(y'(x) - y'(0)) + b(x)xy'(x) - b(x)y(x) + b(x)y(0) \\ = c(x) + y'_0 a(x) + (y_0 + xy'_0)b(x) \end{aligned}$$

alors cette égalité équivaut à  $y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$ .

b) On sait que l'équation  $u'(x) - \int_0^x k(x,t)u(t)dt = f(x)$  a une unique solution continue sur  $[0,1]$ .

En posant  $y'' = u$  donc  $y'(x) = \int_0^x u(t)dt - y'_0$  et

$y(x) = \int_0^x \left[ \int_0^t u(\alpha)d\alpha - y'_0 \right] dt + y_0$ , on obtient une solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y'_0 \end{cases} \text{ sur } [0,1].$$