EPREUVE COMMUNE de MATHEMATIQUES

Dans ce problème, on étudie les équations intégrales de Volterra, qui s'écrivent sous la forme suivante où $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ et $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ désignent deux fonctions continues données, et où $u : [0, 1] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, inconnue ici, astreinte à vérifier pour $0 \leq x \leq 1$:

$$(1) \qquad u(x) - \int_0^x k(x,t)u(t)dt = f(x).$$

Les trois premières questions sont consacrées à des cas particuliers de cette équation, tandis que la question 4 propose l'étude générale de l'existence et de l'unicité d'une solution u.

1°) On pose $u_0(x) = 1$, puis $u_{n+1}(x) = \int_0^x (x-t)u_n(t)dt$ pour $0 \leq x \leq 1$ et pour $n \in \mathbf{N}$.

a) Calculer $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, puis par récurrence $u_n(x)$.

b) Calculer la somme $U(x)$ de la série $u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$

c) Calculer la somme $V(x)$ de la série $u_0(x) - u_1(x) + \ldots + (-1)^n u_n(x) + \ldots$

d) Vérifier que U et V sont respectivement solutions des équations suivantes :

$$(2) \qquad u(x) - \int_0^x (x-t)u(t)dt = 1.$$

$$(3) \qquad u(x) - \int_0^x (t-x)u(t)dt = 1.$$

2°) On pose $u_0(x) = x$, puis $u_{n+1}(x) = \int_0^x (x-t)u_n(t)dt$ pour $0 \leq x \leq 1$ et pour $n \in \mathbf{N}$.

a) Calculer la somme $U(x)$ de la série $u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$

b) Calculer la somme $V(x)$ de la série $u_0(x) - u_1(x) + \ldots + (-1)^n u_n(x) + \ldots$

c) Vérifier que U et V sont respectivement solutions des équations suivantes :

$$(4) \qquad u(x) - \int_0^x (x-t)u(t)dt = x.$$

$$(5) \qquad u(x) - \int_0^x (t-x)u(t)dt = x.$$

3°) On pose $u_0(x) = f(x)$, puis $u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda u_n(t)dt$ pour $0 \leq x \leq 1$ et pour $n \in \mathbf{N}$ (où λ réel donné).

a) Vérifier par récurrence l'égalité suivante pour une fonction $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ de classe C^{n+1} :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} g^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)dt.$$

b) Etudier les dérivées de u_{n+1} et en déduire que :

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{\lambda^{n+1}(x-t)^n}{n!} f(t)dt \ .$$

c) En déduire alors (avec les justifications nécessaires) la somme $U(x)$ de la série de fonctions $u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ en fonction de $f(x)$, $\exp(\lambda x)$ et $\int_0^x \exp(-\lambda t) f(t)dt$.

d) En déduire que U est solution de l'équation suivante :

$$(6) \qquad u(x) - \lambda \int_0^x u(t)dt = f(x) .$$

e) Retrouver cette solution en résolvant une équation différentielle convenable.

4°) Dans cette question, on étudie l'équation générale (1) décrite dans le préambule :

$$(1) \qquad u(x) - \int_0^x k(x,t)u(t)dt = f(x) .$$

On prouve d'abord l'existence d'une solution u (questions a-b-c), puis son unicité (questions d-e).

On pose à cet effet $u_0(x) = f(x)$, puis $u_{n+1}(x) = \int_0^x k(x,t)u_n(t)dt$ pour $0 \leq x \leq 1$ et pour $n \in \mathbf{N}$.

On admettra que toutes les fonctions u_n de cette suite sont continues sur [0, 1], et on désignera par K et M les maxima des fonctions continues $|k|$ et $|f|$ sur $[0, 1]^2$ et [0, 1] respectivement.

a) Montrer par récurrence l'inégalité suivante pour $0 \leq x \leq 1$ et pour $n \geq 1$:

$$|u_n(x)| \leq M \frac{(Kx)^n}{n!}$$

b) En déduire (avec les justifications nécessaires) que :

- la série $u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ converge pour $0 \leq x \leq 1$.
- la somme $U(x)$ de cette série est continue sur [0, 1].

c) Exprimer (avec les justifications nécessaires) l'intégrale $\int_0^x k(x,t)U(t)\, dt$ en fonction de U et f.

En déduire que U est une solution de (1).

d) Montrer, si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1), que $d = u_1 - u_2$ est solution de :

$$d(x) = \int_0^x k(x,t)d(t)dt .$$

e) Montrer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'inégalité suivante où D désigne le maximum de la fonction continue $|d|$ sur [0, 1] :

$$|d(x)| \leq D \frac{(Kx)^n}{n!} .$$

En déduire que d est la fonction nulle, puis que $u_1 = u_2$.

f) Résoudre par la méthode proposée dans cette question les équations intégrales :

$$(7) \qquad u(x) - \int_0^x (x-t)u(t)dt = x^2 .$$

$$(8) \qquad u(x) - \int_0^x (t-x)u(t)dt = x^2 .$$

(On exprimera les solutions u de ces deux équations à l'aide des fonctions usuelles).

5°) Dans cette question, on applique ce qui précède au problème de Cauchy suivant, dans lequel a, b, c désignent trois fonctions continues de [0, 1] dans **R** et y_0, y'_0 deux réels donnés :

$$y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x) \quad \text{et} \quad y(0) = y_0 \ , \ y'(0) = y'_0.$$

a) Montrer, parmi les fonctions y de classe C^2 de [0, 1] dans **R** qui vérifient $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$, que y est solution du problème de Cauchy précédent si et seulement si y'' est la solution u de :

$$u(x) - \int_0^x [a(x) + (x-t)b(x)]u(t)dt = c(x) + y'_0 a(x) + (y_0 + xy'_0)b(x).$$

b) En déduire l'énoncé et la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz pour ce problème de Cauchy, puis retrouver ainsi les résultats des questions 1° et 2°.

c) Résoudre ainsi, compte tenu des résultats de (7) et (8), les problèmes de Cauchy suivants :

- $y'' = y + x^2$ et $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
- $y'' = -y + x^2$ et $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.