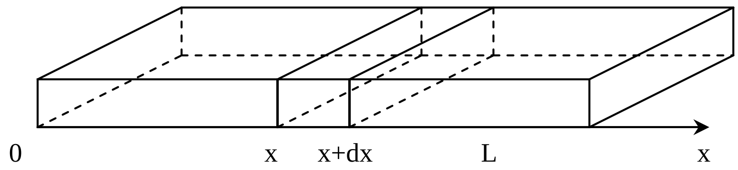
EPREUVE OPTIONNELLE de PHYSIQUE
CORRIGE

PARTIE I : REFROIDISSEMENT D'UN MICROPROCESSEUR



1) Loi de Fourier :

$\vec{j}_Q = -\lambda \, \overrightarrow{grad}\, T$

ici, sur une dimension :

$\boxed{\vec{j}_Q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x}$

Le signe (-) provient du fait que la chaleur se propage spontanément de la température la plus élevée à la température la plus basse: c'est une conséquence directe du second principe de la thermodynamique.

2) L'élément de longueur *dx* reçoit par unité de temps :

$j_Q(x) \cdot ab$ par conduction

et perd :
$$\begin{cases} j_Q(x+dx)ab \text{ par conduction.} \\ hdx(a+b)2(T(x)-T_0) \text{ par convection.} \end{cases}$$

En régime permanent, il ne reçoit et ne perd rien globalement :

$$j_Q(x)ab = j_Q(x+dx)ab + 2hdx(a+b)(T(x)-T_0)$$

$$-\frac{dj_Q}{dx} = abdx = 2hdx(a+b)(T(x)-T_0)$$

avec $\dfrac{dj_Q}{dx} = -\lambda \dfrac{d^2T}{dx^2}$: $\qquad \lambda \dfrac{d^2T}{dx^2} ab = 2h(a+b)(T(x)-T_0)$

Soit : $\boxed{\dfrac{d^2T}{dx^2} - \dfrac{2h(a+b)}{\lambda ab}(T(x)-T_0) = 0}$

En posant $\theta = T - T_0$ et $m^2 = \dfrac{2h(a+b)}{\lambda ab}$, on trouve la forme proposée par l'énoncé, soit :

$\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0}$ $\qquad \boxed{m = \sqrt{\dfrac{2h(a+b)}{\lambda ab}}}$

3) $\theta = Ach(mx) + Bsh(mx)$

$$\frac{d\theta}{dx} = Amsh(mx) + Bmch(mx)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$\theta = T_1 - T_0$ en $x = 0$

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_L = 0$$

soit : $\boxed{T_1 - T_0 = A}$

$$0 = Ash(mL) + B \cdot ch(mL) \rightarrow \boxed{B = -A\frac{shmL}{chmL}}$$

$$A = T_1 - T_0 \qquad B = (T_0 - T_1)\frac{shmL}{chmL}$$

θ s'écrit alors :

$$\theta = (T_1 - T_0)\left[ch\,m\,x - \frac{sh\,m\,L\,sh\,m\,x}{ch\,m\,L}\right] = T - T_0$$

$$\boxed{\theta = (T_1 - T_0)\frac{ch[m(L-x)]}{chmL} = T - T_0}$$

4) Application numérique :

$\boxed{m = 27{,}87 m^{-1}}$ $\boxed{T(L) = 56.7^\circ C}$

5) En appliquant la loi de Fourier, $\vec{j}_Q = -\lambda\frac{dT}{dx}\vec{u}_x = -\lambda \cdot \frac{d\theta}{dx}\vec{u}_x$, on a :

$$\vec{j}_Q = \lambda \cdot m(T_1 - T_0)\frac{sh[m(L-x)]}{chmL}\vec{u}_x$$

en $x = 0$ $\boxed{\vec{j}_Q(0) = \lambda m(T_1 - T_0)\frac{sh[m(L-x)]}{chmL}\vec{u}_x}$

La puissance surfacique évacuée à la base de la tige s'écrit :

$\Phi = \left\|\vec{j}_Q(0)\right\|$ soit :

$$\boxed{\Phi = \lambda \cdot m(T_1 - T_0)thmL}$$

En l’absence de tige, l’évacuation se fait par le flux conducto convectif :

$$\Phi_0 = h(T_1 - T_0)$$

On en déduit l’efficacité de la tige :

$$e = \frac{\Phi}{\Phi_0} \qquad \boxed{e = \frac{\lambda \cdot m \cdot thmL}{h}}$$

Soit numériquement. $\boxed{e = 25{,}99 \cong 26}$

6) La surface totale de la base est S, et celle des ailettes : Nab. Il y a donc :

- une surface S-Nab qui évacue le flux surfacique Φ_0
- une surface Nab qui évacue le flux surfacique $\Phi = e\Phi_0$.

La puissance évacuée s’écrit :

$$P_e = (S - Nab)\Phi_0 + Nabe\Phi_0$$

$$\boxed{P_e = \Phi_0\left[S + Nab(e-1)\right]}$$

7) En régime permanent : $P = P_e = h(T_1 - T_0)\left[S + Nab(e-1)\right]$

$$\boxed{T_1 = T_0 + \frac{P}{h[S + Nab(e-1)]}} \qquad \boxed{T_1 = 55^\circ C}$$

8) En l’absence de ventilateur :

$$h = 10 w \times m^{-2} \times K^{-1}$$

on mouve alors numériquement :

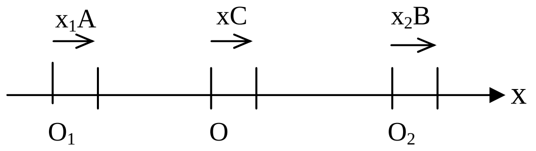
$$m = 8{,}81 \qquad e = 27{,}32$$

$$\text{et } \boxed{T_1 = 375^\circ C}$$

On comprend aisément qu’en l’absence de sécurité, une panne de ventilateur entraîne la destruction du microprocesseur.

PARTIE II : VIBRATIONS D'UNE MOLECULE

1)



Entre C et B, l'allongement du ressort est $x_2 - x$.

Il exerce donc :

$\vec{F}_B = -k(x_2 - x)\vec{u}_x$ sur B

$\vec{F}_{BC} = k(x_2 - x)\vec{u}_x$ sur C

entre C et A, l'allongement du ressort est $x - x_1$: il exerce :

$$\vec{F}_A = k(x - x_1)\vec{u}_x \text{ sur A}$$

$$\vec{F}_{AC} = -k(x - x_1)\vec{u}_x \text{ sur C.}$$

On en déduit, en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à C, A et B :

$$M\ddot{x} = k(x_2 - x) - k(x - x_1)$$

$$m\ddot{x}_1 = k(x - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x)$$

Soit, en ordonnant :

$$M\ddot{x} + 2kx - k(x_1 - x_2) = 0$$

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx = 0$$

2) $\overline{OG} = \dfrac{Mx + mx_1 + mx_2}{M + 2m}$

Le système étant isolé, G reste en 0 : $\overline{OG} = 0$

on en déduit : $x = -\dfrac{m}{M}\left(x_1 + x_2\right)$

En éliminant x dans le système précédent, on obtient :

$$-m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - 2k\frac{m}{M}\left(x_1 + x_2\right) - k\left(x_1 + x_2\right) = 0.$$

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 + k\frac{m}{M}\left(x_1 + x_2\right) = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 + k\frac{m}{M}\left(x_1 + x_2\right) = 0.$$

Les 3 équations ne sont pas indépendantes : la 1ère est la somme des deux autres. Le mouvement est donc régi par les 2 équations :

$$m\ddot{x}_1 + k\left(1+\frac{m}{M}\right)x_1 + k\frac{m}{M}x_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + k\left(1+\frac{m}{M}\right)x_2 + k\frac{m}{M}x_1 = 0.$$

Soit, en introduisant ω_0 et ω_0' :

$$\ddot{x}_1 + \left(\omega_0^2 + \omega'^2_0\right)x_1 + \omega'^2_0 x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \left(\omega_0^2 + \omega'^2_0\right)x_2 + \omega'^2_0 x_1 = 0$$

3) Si les solutions en x_1 et x_2 sont sinusoïdales et de pulsation ω, on peut écrire :

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \qquad \text{et} \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$$

Le système précédent s'écrit :

$$x_1\left[\left(\omega_0^2 + \omega_0'^2\right) - \omega^2\right] + \omega_0'^2 x_2 = 0$$

$$\omega'^2_0 x_1 + \left[\left(\omega_0^2 + \omega'^2_0\right) - \omega^2\right]x_2 = 0$$

4) Le système linéaire et homogène a des solutions non nulles en x_1 et x_2 si son déterminant est nul :

$$\omega'^4_0 - \left[\left(\omega_0^2 + \omega'^2_0\right) - \omega^2\right]^2 = 0$$

Soit :

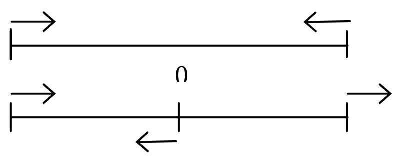
$$\omega'^2_0 = \omega_0^2 + \omega'^2_0 - \omega^2 \qquad\qquad \omega_1^2 = \omega_0^2$$

de solutions :

$$\omega'^2_0 = \omega^2 + \omega_0^2 - \omega'^2_0 \qquad\qquad \omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\omega'^2_0$$

Pour $\omega = \omega_1$, $x_1 = -x_2$ et $x = 0$

Pour $\omega = \omega_2$, $x_1 = x_2$ et $x = -\dfrac{2m}{M}x_1$



5) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\omega_1 = 8{,}07 \cdot 10^{12}\, rd/s$ $f_1 = 1{,}28 \cdot 10^{12}\, Hz$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} + 2\frac{k}{M}}$ $\omega_2 = 1{,}54 \cdot 10^{13}\, rd/s$ $f_2 = 2{,}46 \cdot 10^{12}\, Hz$

6) $\lambda_1 = \frac{c}{f_1}$ $\lambda_2 = \frac{c}{f_2}$

$\lambda_1 = 234{,}4 \mu m$

$\lambda_2 = 122 \mu m$

Domaine infra rouge lointain.