

EPREUVE COMMUNE de MATHÉMATIQUES
CORRIGE

1°) a) Les solutions de l'équation différentielle $y''+y=0$ sont les applications :

$$y = A \sin x + B \cos x .$$

b) Si $y(0) = 0$ alors $B = 0$ et $y(\pi/2) = A = 0$ donc seule la solution nulle convient.

$$2^\circ) \text{ a) } \underline{F(x) = -\cos x \int_0^x \sin t dt - \sin x \int_x^{\pi/2} \cos t dt = 1 - \cos x - \sin x.}$$

$$\underline{F''(x) = \cos x + \sin x} \text{ donc } F(x) + F''(x) = 1.$$

b) L'application F est une solution de l'équation $y''+y=1$ vérifiant $y(0) = y(\pi/2) = 1$ si g est une autre solution vérifiant $g(0) = g(\pi/2) = 0$ alors $F-g$ est une solution de $y''+y=0$ qui vérifie les conditions aux limites $y(0) = y(\pi/2) = 0$ donc $F-g$ est nulle (1° a)) et $g = F$. F est l'unique solution de $y''+y=1$ vérifiant les conditions $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

3°) On procède de la même manière que dans la question 2°)

$$\text{a) : } F(x) = x - \frac{\pi}{2} \sin x, \quad F''(x) + F(x) = x$$

b) F est l'unique solution de $y''+y=x$ vérifiant $y(0) = y(\pi/2) = 0$

$$4^\circ) \text{ a) } F(x) = -\cos x \int_0^x f(t) \sin t dt - \sin x \int_x^{\pi/2} f(t) \cos t dt.$$

$$F'(x) = +\sin x \int_0^x f(t) \sin t dt - \cos x (f(x) \sin x) - \cos x \int_x^{\pi/2} f(t) \cos t dt - \sin x (-f(x) \cos x)$$

$$= \sin x \int_0^x f(t) \sin t dt - \cos x \int_x^{\pi/2} f(t) \cos t dt.$$

$$F''(x) = +\cos x \int_0^x f(t) \sin t dt + \sin x (f(x) \sin x) + \sin x \int_x^{\pi/2} f(t) \cos t dt - \cos x (-f(x) \cos x)$$

$$= -F(x) + f(x).$$

Donc F est deux fois dérivable

b) De plus $F''(x) + F(x) = f(x)$.

c) De plus $F(0) = 0$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc F est l'unique solution de

$$F'' + F = f \text{ telle que } y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

5°) a) Comme $f \in C^\infty\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et comme $F'' + F = f$, on montre par récurrence que

$$F \in C^\infty\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } Tf \in E \text{ si } f \in E.$$

-Il est clair que T est linéaire.

b) Etude de l'injectivité de T . On prend $f \in E$ vérifiant $Tf = 0$ alors $F = Tf$ vérifie $F'' + F = f = 0 + 0$ - ce qui donne $f = 0$.

Le noyau de T est réduit à l'application nulle et T est injective.

c) Etude de la surjectivité de T . Si $F \in E$ et $F = Tf$ (où $f \in E$) alors $F(0) = 0$ et donc T n'est pas surjective.

6°) a) Soit f une fonction propre associée à la valeur propre λ ($\neq 0$ puisque T est injective) alors $Tf = \lambda f$ et

$$f = (Tf)'' + Tf = \lambda(f'' + f) \text{ et donc } \underline{f'' + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)f = 0.} \text{ et comme } Tf(0) = Tf\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \lambda f(0) = \lambda f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ ce}$$

$$\text{qui donne } (\lambda \neq 0) \underline{f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.}$$

b) Si $\lambda = 1$, $f'' = 0$ et comme $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $f(x) = Ax + B$ et $A = B = 0$

Donc la seule fonction qui vérifie (R) est la fonction nulle

c) Si $1 - \frac{1}{\lambda} = \omega^2$, comme $f'' = \omega^2 f$, $f(x) = A \sinh \omega x + B \cosh \omega x$ et comme

$$f(0) = 0, B = 0 \text{ et } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ donne } A = 0; \text{ Donc la seule fonction qui vérifie (R) est la fonction nulle.}$$

d) Si $1 - \frac{1}{\lambda} = \omega^2$, comme $f'' = -\omega^2 f$, $f(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$, $f(0) = B = 0$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ ce qui donne } A = 0 \text{ si } \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$$

$$\text{Si } \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \text{ } f = 0$$

Si $\sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) = 0$ ou encore $\omega = 2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) $f(x) = A \sin(2nx)$ et $\lambda = \frac{-1}{4n^2 - 1}$ où

$$n \in \mathbb{N}^*.$$

Si λ est une valeur propre de T , nécessairement il existe $f \in E$ non nulle et vérifiant $f(0) = f(\pi/2) = 0$. et

$$f'' + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)f = 0$$

Seul $1 - \frac{1}{\lambda} = \omega^2 = 4n^2$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) peut convenir.

$$\lambda_n = \frac{-1}{4n^2 - 1}.$$

- Si l'on prend $f_n \in E$ vérifiant $f_n''(x) + \left(1 - \frac{1}{\omega_n}\right)f_n(x) = 0$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(\pi/2) = 0$

(en fait $f_n(x) = A \sin(\omega_n x)$ avec $\omega_n = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_n}}$)

$$f_n''(x) + f_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} f_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} (F''(x) + F(x)) \text{ et } F(0) = F(\pi/2) = 0 \text{ où } F = Tf_n$$

on en déduit (unicité de F) $Tf_n = F = \lambda_n f_n$ - ce qui assure que λ_n est valeur propre de T . (on peut choisir A donc f_n non nulle).

7^e) a)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} G(x,t) f(t) dt &= \int_0^x G(x,t) f(t) dt + \int_x^{\pi/2} G(x,t) f(t) dt \\ &= -\cos x \int_0^x \sin tf(t) dt - \sin x \int_x^{\pi/2} \cos tf(t) dt \\ &= Tf(x). \end{aligned}$$

Comme la fonction $t \rightarrow \sin(2nt)$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre λ_n on obtient.

$$\int_0^{\pi/2} G(x,t) \cdot \sin(2nt) dt = \lambda_n \sin(2nx).$$

b) Si g est impaire et π périodique

$$\bullet b_{2n}(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} g(t) \sin(2nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(t) \sin(2nt) dt$$

est π périodique

$$b_{2n}(g) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(t) \sin(2nt) dt \text{ (puisque } t \rightarrow g(t) \sin(2nt) \text{ est paire)}$$

$$\bullet b_{2n+1}(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin((2n+1)t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 g(t) \sin((2n+1)t) dt + \int_0^{\pi} g(t) \sin((2n+1)t) dt \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{-\pi} g(n-\pi) \sin((2n+1)(n-\pi)) \cdot d(n-\pi) + \int_0^{\pi} g(t) \sin((2n+1)t) dt \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} g(u) \cdot \sin((2n+1)u) \cdot du + \int_0^{\pi} g(t) \sin((2n+1)t) dt \right].
\end{aligned}$$

Comme g est impaire, $a_n(g) = 0$.

c) La fonction $y \in [0, \pi/2] \rightarrow G(x, y)$ (pour x fixé) est continue sur $[0, \pi/2]$ de classe C^1 par morceaux. On la prolonge en une fonction impaire qui reste continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et en une fonction π -continue sur \mathbb{R} (par π -périodicité).

Donc on dispose d'une fonction impaire π -périodique et continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 par morceaux et d'après la question précédente les $(a_n)_n$ et $(b_{2n+1})_n$ sont nuls.

$$b_{2n} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} G(x, t) \sin(2nt) dt = \frac{4}{\pi} \lambda_n \sin(2nx).$$

On en déduit que $G(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n} \cdot \sin(2ny)$ (avec convergence normale).

Donc $G(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \lambda_n \sin(2nx) \cdot \sin(2ny)$ pour $x \in [0, \pi/2]$ et $y \in [0, \pi/2]$.

$$\begin{aligned}
\text{d) } Tf(x) &= \int_0^{\pi/2} G(x, t) f(t) dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \sin(2nt) \sin 2nxf(t) dt \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \sin(2nx) \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) f(t) dt \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \sin(2nx) \cdot b_{2n}(f) = T_f(x).
\end{aligned}$$

(On peut intervenir \sum et \int puisque la convergence de la série en t sur le segment $[0, \pi/2]$ est normale en effet

$\|\lambda_n \sin 2nt \cdot \sin(2nx) f(t)\|_{\infty} = \sup |\lambda_n \sin 2nt \cdot \sin 2nxf(t)| \leq |\lambda_n| \|f\|_{\infty} = \frac{1}{4n^2 - 1} \|f\|_{\infty}$ terme général d'une série convergente).

$$\text{e) On obtient } \int_0^{\pi/2} G(x, x) dx = - \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx = \left[\frac{\cos^2 x}{2} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Or } \int_0^{\pi/2} G(x, x) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \sin(2nx) \cdot \sin(2nx) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \int_0^{\pi/2} \sin^2(2nx) dx = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(4nx)}{2} dx \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \cdot \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n.
\end{aligned}$$

(On peut intervenir Σ et \int . La série $\sum_1^{+\infty} \lambda_n \sin^2(2nx)$ converge normalement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puisque

$$\sum \frac{1}{4n^2 - 1} = \sum |du| \text{ converge})$$

$$f) - \iint_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2} G^2(x, y) dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sum_{0 \leq m, p \leq +\infty} \lambda_n \cdot \lambda_p \sin(2nx) \sin(2px) \sin(2ny) \sin(2py) dy$$

$$(E) = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \sin(2nx) \sin(2ny) \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \lambda_p \sin(2px) \sin(2py) \right)}_{h(x,y)} dx \right] dy$$

(La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \sin(2nx) \sin(2ny) h(x, y)$ converge normalement en x sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en effet

$$|\lambda_n \sin(2nx) \sin(2ny) h(x, y)| \leq |\lambda_n| \cdot \sup_x |h(x, y)| \leq |\lambda_n| \left(\sum_{p=1}^{+\infty} |\lambda_p| \right)$$

$$\text{et donc } (E) = \int_0^{\pi/2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \sin(2nxy) \int_0^{\pi/2} h(x, y) \cdot \sin(2nx) dx \right] dy$$

(par un raisonnement de convergence normale et comme $\int_0^{\pi/2} \sin(2nx) \sin(2px) dx = \frac{\pi}{4} \delta_{n,p}$)

$$(E) = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \lambda_n \lambda_p \sin(2ny) \int_0^{\pi/2} \sin(2nx) \sin(2px) \sin(2py) dx \right) dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \frac{\pi}{4} \sin(2ny) \sin(2xy) dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(\frac{\pi}{4} \right)^2.$$

$$\text{Calcul de } \iint_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2} G^2(x, y) dx dy = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} -G^2(x, y) dx \right] dy.$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^y \sin^2 x \cos^2 y dx + \int_y^{\pi/2} \sin^2 y \cos^2 x dx \right] dy. \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 y \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^y + \sin^2 y \cdot \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_y^{\pi/2} \right) dy \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{y}{2} (\cos 2y) + \frac{\pi}{4} \left(\frac{1 - \cos 2y}{2} \right) - \frac{1}{4} \sin 2y \right) dy = \frac{\pi^2}{16}.
\end{aligned}$$

On a trouvé $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 = 1$.