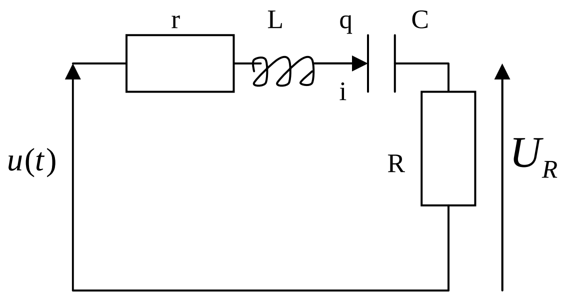
EPREUVE OPTIONNELLE de PHYSIQUE
CORRIGE

Oscillateur à quartz

I



$$i = \frac{dq}{dt}$$

1) La loi des mailles s'écrit :

$$(r+R)i + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = u(t)$$

en dérivant une fois par rapport à t :

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + (R+r)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{du}{dt}$$

$u_R = Ri$; en remplaçant i par $\frac{u_R}{R}$, l'équation s'écrit :

$$\frac{L}{R}\frac{d^2u_R}{dt^2} + \frac{1}{R}(R+r)\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = \frac{du}{dt}$$

$$\boxed{\frac{L}{R}\frac{d^2u_R}{dt^2} + (1+\frac{r}{R})\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = \frac{du}{dt}}$$

2) En régime forcé :

$\underline{u}_R = U_R e^{j(\omega t+\varphi)}$; $\frac{d\underline{u}_R}{dt} = j\omega \underline{u}_R$; $\underline{q} = \frac{1}{j\omega}\underline{u}_R \cdot \frac{1}{R}$

La loi des mailles s'écrit alors :

$$(1+\frac{r}{R})\underline{u}_R + \frac{1}{R}jL\omega\underline{u}_R + \frac{1}{jRC\omega}\underline{u}_R = \underline{u}$$

$$\underline{u}_R = \frac{1}{(1+\frac{r}{R}) + j\frac{1}{R}(L\omega - \frac{1}{C\omega})}u_0 e^{i\omega t}$$

En écrivant l'égalité des modules et des arguments , on obtient :

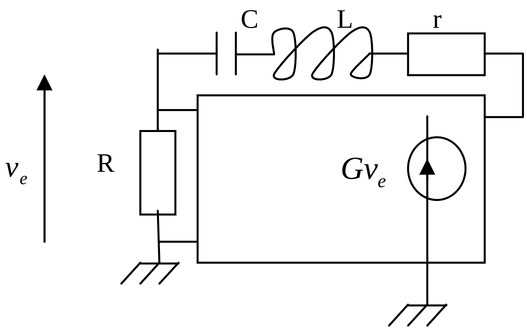
$$\boxed{\underline{u}_R = \frac{u_0}{[(1+\frac{r}{R})^2 + \frac{1}{R^2}(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2]^{1/2}}}$$

et

$$\cos\varphi = \frac{1+\frac{r}{R}}{[(1+\frac{r}{R})^2 + \frac{1}{R^2}(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2]^{1/2}}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{R+r}{[(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2]^{1/2}}}$$

II



1) On applique la loi des mailles de la première partie,

en faisant : $u(t) = Gu_R$

L'équation différentielle s'écrit :

$$(1+\frac{r}{R})\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R + \frac{L}{R}\frac{d^2u_R}{dt^2} = G\cdot\frac{du_R}{dt}$$

$$v_e = u_R$$
$$Gv_e = Gu_R$$

Soit :

$$\boxed{\frac{d^2u_R}{dt^2} + (1+\frac{r}{R} - G)\frac{R}{L}\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{LC}u_R = 0}$$

Les solutions de cette équation sont sinusoïdales pures si le terme du premier membre s'annule, c'est–à– dire pour :

$$G = 1 + \frac{r}{R}$$

L'équation en u_R s'écrit alors :

$$\frac{d^2u_R}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_R = 0$$

Les solutions sont sinusoïdales, de pulsation :

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, soit de fréquence : $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

2) En oscillations forcées de pulsation ω, l'équation du circuit s'écrit :

$$\left(1+\frac{r}{R}\right)u_R + \frac{1}{R}\,j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)u_R = Gu_R$$

Soit :

$$1+\frac{r}{R}+\frac{1}{R}\,j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = G$$

Pour que cette équation soit vérifiée, G étant réel, il faut que la partie imaginaire du membre de gauche soit nulle, ce qui donne la condition sur ω :

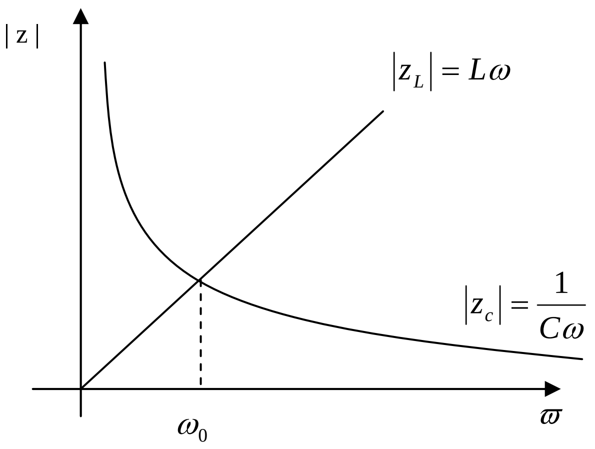
$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \text{ soit } \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Il faut également qu'il y ait égalité des parties réelles :

$$G = 1+\frac{r}{R}$$

On retrouve les conditions d'oscillation précédentes.

3)



On tire immédiatement de la condition sur la pulsation :

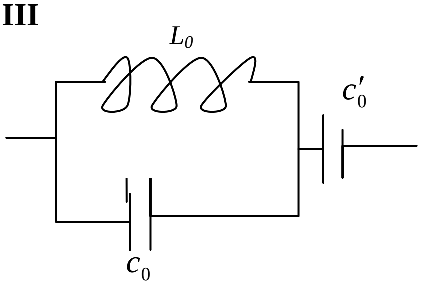
$$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

C'est-à-dire que le point d'oscillation se trouve à l'intersection des 2 courbes.

4) A. N :

$$G = 1{,}05 \qquad \varpi_0 = 707106{,}8\ rd/s \qquad f_0 = 112539{,}5\ Hz$$

III



1) L'impédance équivalente du quartz s'écrit :

$$\underline{z} = \frac{1}{jC_0^{'}\omega} + \frac{1}{jC_0\omega + \frac{1}{jL_0\omega}} = \frac{1}{jC_0^{'}\omega} + \frac{jL_0\omega}{1-L_0C_0\omega^2}$$

$$\underline{z} = \frac{\left(1 - L_0 C_0 \omega^2\right) + jL_0\omega\left(jC_0^{'}\omega\right)}{jC_0^{'}\omega\left(1 - L_0 C_0 \omega^2\right)}$$

$$\underline{z} = \frac{1 - L_0\left(C_0 + C_0^{'}\right)\omega^2}{jC_0^{'}\omega\left(1 - L_0 C_0 \omega^2\right)}$$

Soit z le module de <u>z</u> :

$$z = \frac{\left|1 - L_0\left(C_0 + C_0^{'}\right)\omega^2\right|}{C_0^{'}\omega\left|1 - L_0 C_0 \omega^2\right|}$$

z = 0 pour $\omega = \omega_R$:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{L_0(C_0 + C_0^{'})}} \qquad f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0\left(C_0 + C_0^{'}\right)}}$$

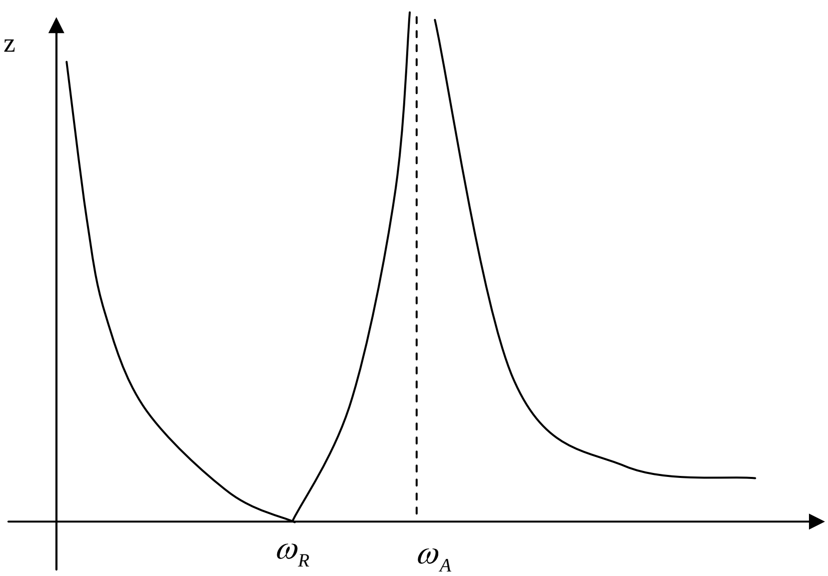
$z \to \infty$ pour $\omega = \omega_A$:

$$\omega_A = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \qquad f_A = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}}$$

A. N :

$$f_r = 112259{,}2Hz$$
$$F_A = 112539{,}5Hz$$

L'allure de la courbe est donc :



2) $\underline{z} = jx$ avec :

$$X = -\frac{1 - L_0(C_0 + C_0^{'})\omega^2}{C_0^{'}\omega\left(1 - LC_0\omega^2\right)} = -\frac{N}{D}$$

on étudie les signes de N et D, et on en déduit ceux de X :

ω		ω_R		ω_A	
N	+	0	-		-
D	+		+	0	-
X	-		+		-

Le quartz est inductif entre ω_R et ω_A :
$\omega_R < \omega < \omega_A$

3) Pour réécrire l'équation du circuit modifié, on remplace l'impédance de l'inductance par celle du quartz : on obtient ainsi :

$$\left(1 + \frac{r}{R}\right)\underline{u}_R + \frac{1}{R}\, j\left[\frac{L_0(C_0 + C_0^{'})\omega^2}{C_0^{'}\omega\left(1 - L_0C_0\omega^2\right)} - \frac{1}{C\omega}\right]u_R = G \cdot \underline{u}_R \,.$$

La condition sur le gain reste la même : $G = 1 + \dfrac{r}{R}$

La fréquence des oscillations est donnée par : $\left(f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi}\right)$

$$\frac{L_0\left(C_0 + C_0^{'}\right)\omega_1^2}{C_0^{'}\omega\left(1 - L_0C_0\omega_1^2\right)} = \frac{1}{C\omega}$$

$$L_0(C_0 + C_0^{'})\omega_1^2 = \frac{C_0^{'}}{C}\left(1 - L_0C_0\omega_1^2\right)$$

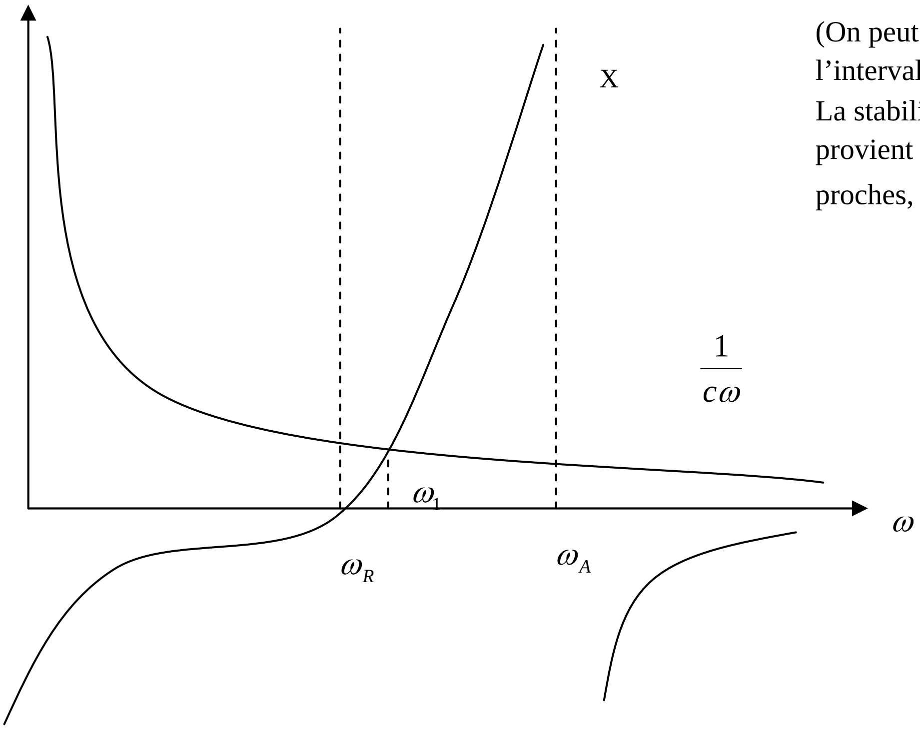
Soit, en introduisant ω_A et ω_R : $\dfrac{{\omega_1}^2}{\omega_R^2} - 1 = \dfrac{C_0^{'}}{C}\left(1 - \dfrac{{\omega_1}^2}{\omega_A^2}\right)$

On en déduit :

$$\omega_1^2 = \omega_R^2\,\frac{1 + \dfrac{C_0^{'}}{C}}{1 + \dfrac{C_0^{'}}{C}\dfrac{\omega_R^2}{\omega_A^2}}$$

A. N : $f_1 = 112260{,}6\,Hz$

4) On construit $\dfrac{1}{C\omega}$ et X sur la même courbe : ω est à l'intersection des 2 courbes.



(On peut ne construire x que dans l'intervalle $\left[\omega_R, \omega_A\right]$
La stabilisation en fréquence provient du fait que, ω_R et ω_A étant proches, $X(\omega)$ est quasi verticale.

Polarisation par un guide d'onde

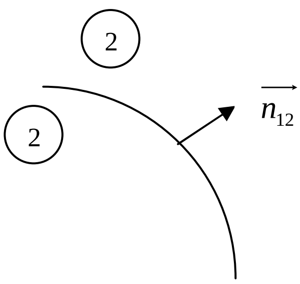
<u>Préliminaire</u> :

a) Equations de Maxwell dans le vides en l'absence de charges de courants :

$$div\vec{E} = 0 \qquad div\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

b) Conditions de passage à la traversée d'une nappe portant σ superficielle, et parcourue par $\vec{j}_s$ superficiel :



$$\boxed{\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n_{12}}}$$

$$\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}}$$

1) Equation de propagation :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \overrightarrow{\Delta E} = -\overrightarrow{\Delta E} \qquad (div\vec{E} = 0)$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

On en déduit l'équation de propagation :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

2) $\vec{E} = E_0 \sin\beta\ y e^{i(\omega t - kz)}\vec{u}_x$ doit être solution de l'équation précédente, soit, avec

$\vec{E} = E\vec{u}_x$:

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = (-\beta^2 - k^2)E$$

En portant dans l'équation, on trouve :

$$\frac{\omega^2}{c^2}E - (\beta^2 + k^2)E = 0$$

La forme proposée pour $\vec{E}$ est solution à condition que, ω, β et k soient reliés par la relation :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2}$$

3) Dans un conducteur parfait, on a à tout instant :

$\vec{E} = \vec{0}$ et ($\vec{B} = \vec{0}$), ou $\vec{B}$ statique.

Le champ $\vec{E}$ proposé est tangent aux conducteurs en *y = 0* et *y = b*. Comme il ne peut pas subir de discontinuité, on doit avoir :

$\vec{E}(y = 0) = \vec{E}(y = b) = \vec{0}$ quelque soient *z* et *t*.

$\sin\beta y = 0$ en *y = 0* : la 1ère condition est réalisée.

La seconde impose :

$$\sin \beta b = 0 \text{ soit } \beta b = p\pi \text{ , où } p \text{ est un entier.}$$

$$\beta = p\frac{\pi}{b}$$

Soit, avec *p = 1* :

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \sin\frac{\pi y}{b} e^{i(\omega t - kz)}\vec{u}_x}$$

4) Pour qu'il y ait propagation, il faut que k soit réel, c'est à dire que k^2 soit positif :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \geq 0 \text{ , soit } \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{b^2} \geq 0$$

ω doit donc être supérieur à $\omega_c = \dfrac{\pi c}{b}$, soit $f > f_c$:

$$\boxed{f_c = \frac{c}{2b}}$$

k^2 s'écrit alors :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_c^{\ 2}}{c^2} \qquad \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v_\varphi^{\ 2}} = \frac{1}{c^2}(1 - \frac{\omega_c^{\ 2}}{\omega^2})$$

on en déduit :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_c^{\ 2}}{\omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{f_c^{\ 2}}{f^2}}}$$

5) Application numérique :

$$\boxed{f_c = 2{,}5 GH_z} \qquad \boxed{v_\varphi = 5{,}43 \cdot 10^8 \ m/s}$$

$$\boxed{n = 0{,}552}$$

6) Le problème est identique au précédent, à condition de permuter x et y : on trouve alors :

$$\vec{E} = E_0 \sin\frac{\pi}{a} y e^{i(\omega t - k'z)}$$

$$\boxed{f_c' = \frac{c}{2a}} \qquad \boxed{v_\varphi' = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{f_c'^2}{f^2}}}} \qquad \boxed{n' = \sqrt{1-\frac{f_c'^2}{f^2}}}$$

$$\boxed{f_c' = 1{,}875\ GH_z} \qquad \boxed{v_\varphi' = 3{,}843 \cdot 10^8\ m/s} \qquad \boxed{n' = 0{,}781}$$

7)

a) $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, le champ s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x + E_0 e^{i(\omega t - k'z)} \vec{u}_y$$

Dans le plan $z = 0$, les 2 cordonnées sont en phase : la polarisation est rectiligne et à 45° des axes 0x et 0y.

En $z = z_0$, la différence de marche s'écrit :

$$\boxed{\delta = z_0 (n' - n)}$$

b) Le déphasage en sortie entre E_x et E_y s'écrit :

$$\Delta\varphi = z_0 (k' - k) = z_0 \omega \left(\frac{1}{v'_\varphi} - \frac{1}{v_\varphi}\right) = z_0 \frac{\omega}{c} (n' - n)$$

$$\Delta\varphi = z_0 \frac{2\pi}{c} f (n' - n) z_0$$

α) Il faut que $\Delta\varphi = \pi$ $\qquad z_0 = \frac{c}{2 f (n' - n)}$ $\qquad z_0 = 21{,}8\ cm$

β) Il faut que $\Delta\varphi = 2\pi$ $\qquad z_0 = \frac{c}{f (n' - n)}$ $\qquad z_0 = 43{,}6\ cm$

γ) Il faut que $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\qquad z_0 = \frac{c}{4 f (n' - n)}$ $\qquad z_0 = 10{,}6\ cm$