

EPREUVE COMMUNE de MATHÉMATIQUES CORRIGÉ

PARTIE I

1°)

a)

Comme $a(e_1)=e_2$ et $a^2(e_1)=e_3$ la famille $(e_1, a(e_1), a^2(e_1))$ est une base de E et a est cyclique.

- Le polynôme caractéristique de A est : $-(x-1)(x-2)(x-3)$.

- $\text{Ker}(A-I_3)=\text{Vect} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\text{Ker}(A-2I_3)=\text{Vect} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\text{Ker}(A-3I_3)=\text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- La matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base des trois vecteurs propres $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

est :

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

- La famille $(e_1, b(e_1)=e_2, b^2(e_1)=e_3)$ est une base de E et b est cyclique.
- Le polynôme caractéristique de B est : $-(x-1)(x+1)^2$

- $\text{Ker}(B+I_3)=\text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sa dimension vaut 1 alors que l'ordre de multiplicité de la valeur propre -1 est 2.

La matrice B n'est pas diagonalisable.

- b n'est pas diagonalisable.

2°)

a) $c^k(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \lambda_1^k x_1 + \dots + \lambda_n^k x_n$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

Si les n vecteurs $(x_0, c(x_0), \dots, c^{n-1}(x_0))$ forment une famille liée, il existe n scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ non

tous nuls vérifiant : $\alpha_0(x_1 + \dots + x_n) + \alpha_1(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) + \dots + \alpha_{n-1}(\lambda_1^{n-1} x_1 + \dots + \lambda_n^{n-1} x_n) = 0$

ou encore : $(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1})x_1 + \dots + (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1})x_n = 0$.

La famille x_1, \dots, x_n est libre, on obtient donc :

$$P(\lambda_1) = P(\lambda_2) = \dots = P(\lambda_n) = 0 \text{ avec } P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}.$$

P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ ayant n racines distinctes, ce qui est impossible.

b) La famille $(x_0, c(x_0), \dots, c^{n-1}(x_0))$ est libre, c'est une base de E puisque son cardinal est n et c est cyclique.

PARTIE II

3°)

a) Toute famille libre contient au plus n vecteurs.

Donc l'ensemble $\{m / ((x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)) \text{ est libre})\}$ est majoré par n et non vide. Il admet un plus grand élément m .

La famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre et la famille $(x_0, \dots, f^m(x_0))$ est liée donc $f^m(x_0)$ est une combinaison linéaire de $(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$.

On a prouvé que : $f^m(x_0) \in \text{Vect}((x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)))$.

Supposons que : $f^{m+k}(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$

c'est à dire que $f^{m+k}(x_0) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \dots + \alpha_{m-1} f^{m-1}(x_0)$,

$$f^{m+k+1}(x_0) = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f^2(x_0) + \dots + \alpha_{m-1} f^m(x_0) \in \text{Vect}(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^m(x_0))$$

et comme $f^m(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ on obtient :

$$f^{m+k+1}(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)).$$

On a prouvé par récurrence que : $f^{m+k+1}(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ et comme la famille $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de E .

$$E = \text{Vect}((f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}) \subset \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)).$$

b) La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre et génératrice : c'est une base de E donc son cardinal vaut $n : m = n$.

4°)

a) Comme $f^n(x_0) = p_{n-1} f^{n-1}(x_0) + \dots + p_1 f(x_0) + p_0 x_0$.

$$\text{Matr}(f, (x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))) = M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p_0 \\ 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ \cdot & 0 & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & p_{n-1} \end{bmatrix}$$

b) Supposons $\alpha_0 Id + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0$.

Alors $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$ et les α_i ($0 \leq i \leq n-1$) sont nuls.

La famille (Id, f, \dots, f^{n-1}) est libre ainsi que toute sous famille de cette famille.

Soit $Q = q_0 + q_1 X + \dots + q_k X^k$ avec $Q_k \neq 0$ vérifiant $Q(f) = 0$, les $k+1$ endomorphismes Id, f, \dots, f^k sont liés et $k \geq n$.

c) $Q(f)(x_0) = f^n(x_0) - p_{n-1} f^{n-1}(x_0) - \dots - p_0 x_0 = 0$; $P(f)(f(x_0)) = f(P(f(x_0))) = 0 \dots$
 $\dots P(f)(f^k(x_0)) = f^k(P(f)(x_0)) = 0$.

Donc $P(f)$ annule les vecteurs de la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ de E et $P(f) = 0$.

5°)

a) Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ , $f(x) = \lambda x, \dots, f^{(k)}(x) = \lambda^k x$ donc $P(f)(x) = (\lambda^n - p_{n-1}\lambda^{n-1} \dots - p_0\lambda^0)(x) = P(\lambda).x = 0$ et comme $x \neq 0$, $P(\lambda) = 0$.

b) On sait que $\dim \text{Ker}(f - \lambda Id) \geq 1$ donc $\text{rang}(f - \lambda Id) \leq n - 1$.

La matrice de $f - \lambda Id$, $M - \lambda I_n$ est de rang $\geq n - 1$ puisque les $n - 1$ premières colonnes de $M - \lambda I_n$ sont indépendantes.

La dimension du sous-espace propre $\text{Ker}(f - \lambda Id)$ vaut donc 1.

b) Si c 'est un endomorphisme cyclique diagonalisable, la somme des sous-espaces propres est E , les sous-espaces sont de dimensions 1, il y a donc n valeurs propres distinctes.

Réciproquement tout endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes est cyclique.

6°)

a) $C(f)$ est clairement un sous-espace vectoriel de $L(E)$ (stable par combinaisons linéaires et non \emptyset).

$C(f)$ est un sous anneau de $(L(E), o)$ ($Id \in C(f)$) et si f et h appartiennent à $C(f)$, $g \circ h$ y appartient encore.

b) Si u et $v \in C(f)$, $u(x_0) = v(x_0) \Rightarrow f^k(u(x_0)) = u(f^k(x_0)) = v(f^k(x_0))$ donc l'image par u et v de la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est la même et $u = v$.

c) Si $g \in C(f)$, comme $a_0 Id + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1} \in C(f)$ on déduit de la question précédente que $g = a_0 Id + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.

d) Si $g \in C(f)$ on peut écrire $g(x_0) = a_{n-1} f^{n-1}(x_0) + \dots + a_0 x_0$ donc $g = a_0 Id + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.

Il est clair que $C(f) \subset \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$ et l'inclusion inverse est vérifiée : $\dim C(f) = n$.