EPREUVE COMMUNE de MATHEMATIQUES

Dans ce problème, on désigne par E l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables de $[0, \pi/2]$ dans $\mathbf{R}$, et on considère sur $[0, \pi/2]$ l'équation différentielle $y'' + y = f$ où f est donnée dans E.

L'objectif est de déterminer les solutions y vérifiant les deux conditions aux limites $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

A cet effet, on introduit l'application T associant à toute fonction f appartenant à l'espace vectoriel E la fonction $F = Tf$ définie sur $[0, \pi/2]$ par :

$$F(x) = -\cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt - \sin(x)\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(t)dt.$$

1°) On étudie quelques propriétés de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

a) Préciser l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

b) Préciser celles qui vérifient les conditions aux limites $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

2°) On étudie la fonction $F = Tf$ lorsque f est la fonction définie par $f(x) = 1$.

a) Calculer $F(x)$ (sans symbole intégral), puis $F''(x) + F(x)$.

b) Déterminer toutes les solutions y de l'équation $y'' + y = 1$ telle que $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

3°) On étudie la fonction $F = Tf$ lorsque f est la fonction définie par $f(x) = x$.

a) Calculer $F(x)$ (sans symbole intégral), puis $F''(x) + F(x)$.

b) Déterminer toutes les solutions y de l'équation $y'' + y = x$ telle que $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

4°) On étudie la fonction $F = Tf$ lorsque f est une fonction quelconque de E.

a) Montrer que F est deux fois dérivable, puis expliciter $F'(x)$ et $F''(x)$.

b) Exprimer $F''(x) + F(x)$ en fonction de $f(x)$.

c) Déterminer toutes les solutions y de l'équation $y'' + y = f$ telle que $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

5°) On étudie l'application T, qui associe à toute fonction f de E la fonction $F = Tf$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

b) Etudier son injectivité.

(On pourra partir d'un élément f de Ker$T$ qui vérifie donc $F = Tf = 0$ et dériver deux fois).

c) Etudier sa surjectivité.

6°) On étudie les éléments propres de l'endomorphisme T.

a) On considère une valeur propre λ de T et une fonction propre associée $f \in$ E.

Montrer que λ est non nul et que f vérifie les relations (R) :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad f''(x) + (1 - \frac{1}{\lambda}) f(x) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

b) On suppose $\lambda = 1$. Déterminer les fonctions vérifiant (R).

c) On suppose $1 - \frac{1}{\lambda} = -\omega^2 < 0$ (avec $\omega > 0$). Déterminer les fonctions vérifiant (R).

d) On suppose $1 - \frac{1}{\lambda} = +\omega^2 > 0$ (avec $\omega > 0$).

Montrer, s'il existe une fonction non nulle $f \in$ E vérifiant (R), que $\omega = 2n$ avec $n \in$ **N***.

En déduire que les valeurs propres de T sont nécessairement de la forme suivante :

$$\lambda_n = \frac{-1}{4n^2 - 1}, \quad \text{où } n \in \mathbf{N}^*.$$

Montrer inversement que ces nombres réels λ_n sont valeurs propres de T en indiquant quelles sont les fonctions propres correspondantes.

7°) On considère la fonction G (fonction de Green) définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]^2$ par :

$$G(x, y) = -\sin(x)\cos(y) \quad \text{si} \quad x \leq y \qquad \text{et} \qquad G(x, y) = -\sin(y)\cos(x) \quad \text{si} \quad y \leq x.$$

a) Montrer, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t) f(t) dt = Tf(x).$$

En déduire, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t) \sin(2nt) dt = \lambda_n \sin(2nx).$$

b) Montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction g : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ impaire et π-périodique vérifient :

$$b_{2n}(g) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin(2nt)dt \quad \text{et} \quad b_{2n+1}(g) = 0.$$

Que dire de ses coefficients de Fourier $a_n(g)$?

c) On prolonge la fonction g : $y \in [0, \frac{\pi}{2}] \to G(x, y)$ en fonction impaire sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ et π-périodique. En considérant la série de Fourier de g, justifier la formule suivante sur $[0, \frac{\pi}{2}]^2$:

$$G(x,y) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \sin(2nx)\sin(2ny).$$

d) En déduire l'expression suivante de Tf pour $f \in$ E et $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

$$Tf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n b_{2n}(f)\sin(2nx).$$

e) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,x)dx$, puis en déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n$.

f) Calculer l'intégrale $\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} G^2(x,y)dxdy$, puis en déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2$.