

EPREUVE COMMUNE de MATHÉMATIQUES CORRIGÉ

Partie I : convergence de la suite (T_n) vers l'intégrale I

1. Expression de T_{2n} en fonction de T_n .

a) a, b, n et f donnés ($n \geq 1$)

$$T_n := f(a) / 2 + f(b) / 2 ;$$

for k from 1 to $n - 1$ do $x := a + k * \frac{b - a}{n}$; $T_n := T_n + f(x)$; od ;

$$\begin{aligned} \text{b) } 2T_{2n} - T_n &= \frac{b - a}{n} \left[\sum_{k=1}^{2n-1} f\left(a + k \frac{b - a}{2n}\right) - \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b - a}{n}\right) \right] \\ &= \frac{b - a}{n} \left[\sum_{p=1}^{n-1} f\left(a + 2p \frac{b - a}{2n}\right) + \sum_{p=0}^{n-1} f\left(a + (2p + 1) \frac{b - a}{2n}\right) - \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b - a}{n}\right) \right] \\ &= \frac{b - a}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f\left(a + (2p + 1) \frac{b - a}{2n}\right). \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, $T_{2n} = \frac{1}{2} \left[T_n + \frac{b - a}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f\left(a + (2p + 1) \frac{b - a}{2n}\right) \right]$.

$$U[0] := (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} ; q := 1 ;$$

For k from 1 to n do $S := 0$; for p from 0 to $q - 1$ do $S := S + f\left(a + (2p + 1)(b - a) / (2 * q)\right)$; od ;

$$U[k] := U[k - 1] / 2 + (b - a) * S / (2 * q) ;$$

$$q := 2 * q ;$$

od ;

Alors $U[n]$ est égal à T_{2^n} .

Le nombre d'évaluations de f nécessitées dans cet algorithme est :

$$2 + 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2 + (2^n - 1) = 2^n + 1.$$

d) Ici $f(x) = 4 / (1 + x^2)$ et $I = \int_0^1 \frac{4}{1 + x^2} dx = \pi$.

Déterminons des valeurs approchées de T_1, T_2, T_4 et T_8 .

Le programme précédent effectué en Maple donne :

$$T_1 = 3 ; T_2 = 3.10000 ; T_4 = 3.13117 ; T_8 = 3.13898.$$

Or $\pi = 3.14159$

Donc $I - T_1$ de l'ordre de $2 \cdot 10^{-1}$; $I - T_2$ de l'ordre de $4 \cdot 10^{-2}$;

$I - T_4$ de l'ordre de 10^{-2} , $I - T_8$ de l'ordre de $3 \cdot 10^{-3}$.

2. Majoration de l'erreur commise dans la méthode des trapèzes

a) A l'aide de deux intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) f''(x) dx &= \left[\frac{1}{2} (x-a)(x-b) f'(x) \right]_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b (2x - (a+b)) f'(x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} (2x - (a+b)) f(x) \right]_a^b + \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

b) On en déduit la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| &\leq \frac{1}{2} \int_a^b |(x-a)(x-b) f''(x)| dx \\ &\leq \frac{M_2}{2} \int_a^b (-x^2 + (a+b)x - ab) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_a^b (-x^2 + (a+b)x - ab) dx &= (a^3 - b^3) / 3 + (a+b)(b^2 - a^2) / 2 - ab(b-a) \\ &= \frac{1}{6} (b-a) (-2a^2 - 2ab - 2b^2 + 3a^2 + 6ab + 3b^2 - 6ab) = \frac{1}{6} (b-a)^3 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \left| \int_a^b f(x) dx - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \leq \frac{M_2}{12} (b-a)^3$$

$$\text{c) } I - T_n = \sum_{k=1}^n \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right]$$

$$\text{car pour tout } k \in \{1, 2, \dots, n\}, x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

On obtient donc la majoration suivante :

$$|I - T_n| \leq \sum_{k=1}^n \frac{M_2}{12} \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 \text{ ce qui s'écrit aussi } |I - T_n| \leq \frac{M_2}{12} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2.$$

Partie II : développement limité de T_n quand n tend vers $+\infty$

3. Etude d'une suite de nombres rationnels

a) La relation définissant la suite de réels b_n s'écrit $\sum_{p=1}^{n+1} \frac{b_{n+1-p}}{p!} = 0$ pour tout $n \geq 1$, avec $b_0 = 1$.

La relation précédente s'écrit aussi : $b_n = - \sum_{p=2}^{n+1} \frac{b_{n+1-p}}{p!} = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(n+1-k)!}$ et montre que l'on détermine b_n de façon unique par récurrence.

b) On prouve par récurrence que les b_n sont rationnels.

$$b_1 = -\frac{1}{2}; b_2 = -\frac{b_0}{3!} - \frac{b_1}{2!} = \frac{1}{12}; b_3 = -\frac{b_0}{4!} - \frac{b_1}{3!} - \frac{b_2}{2!} = 0; b_4 = -\frac{b_0}{5!} - \frac{b_1}{4!} - \frac{b_2}{3!} - \frac{b_3}{2!} = -\frac{1}{720}$$

4. Etude des polynômes de Bernoulli

$$\text{a) } B_1(X) = -\frac{1}{2} + X; B_2(X) = \frac{1}{12} - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{2};$$

$$B_3(X) = \frac{X}{12} - \frac{X^2}{4} + \frac{X^3}{6}; B_4(X) = -\frac{1}{720} + \frac{X^2}{24} - \frac{X^3}{12} + \frac{X^4}{24}.$$

Montrons que $B_n'(X) = B_{n-1}(X)$ pour tout $n \geq 1$ et $B_n(0) = B_n(1)$ pour $n \geq 2$.

Pour tout $n \geq 1$, $B_n(X) = \sum_{p=0}^n \frac{b_{n-p} X^p}{p!}$; on en déduit :

$$B_n'(X) = \sum_{p=1}^n \frac{b_{n-p} X^{p-1}}{(p-1)!} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{b_{n-1-p} X^p}{p!} = B_{n-1}(X).$$

Pour tout $n \geq 2$, $B_n(0) = b_n$ et $B_n(1) = \sum_{p=0}^n \frac{b_{n-p}}{p!} = b_n + \sum_{p=1}^n \frac{b_{n-p}}{p!} = b_n = B_n(0)$.

b) Pour tout $n \geq 1$, $C_n'(X) = C_{n-1}(X)$; on en déduit par récurrence que :

pour tout p tel que $0 \leq p \leq n$, $C_n^{(p)}(X) = C_{n-p}(X)$ d'où $C_n^{(p)}(0) = C_{n-p}(0)$.

On en déduit à l'aide de la formule de Taylor : $C_n(X) = \sum_{p=0}^n \frac{C_n^{(p)}(0) X^p}{p!} = \sum_{p=0}^n \frac{C_{n-p}(0) X^p}{p!}$.

L'égalité $C_n(0) = C_n(1)$ s'écrit donc aussi : $C_n(0) = \sum_{p=0}^n \frac{C_{n-p}(0)}{p!}$ d'où $\sum_{p=1}^n \frac{C_{n-p}(0)}{p!} = 0$.

La suite de réels $(C_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie donc les mêmes propriétés que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Or on a montré à la question 3.a que cette suite est unique.

On a donc l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n(0) = b_n$; cela implique pour tout entier n : $C_n(X) = B_n(X)$.

c) Notons $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$; alors la suite de polynômes C_n ainsi définie vérifie les propriétés de la question b. On en déduit que $C_n = B_n$.

En particulier $B_n(0) = (-1)^n B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$ pour tout entier n .

Cela implique dans le cas où n est impair, $n = 2p + 1$, que $B_{2p+1}(0) = 0$;

or pour tout n , $B_n(0) = b_n$. On a donc : $\forall p \in \mathbb{N}$, $b_{2p+1} = 0$.

5. Développement limité de T_n quand n tend vers $+\infty$

a) Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{2p+1} avec $p \geq 1$.

A l'aide d'intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t) dt &= \left[\left(t - \frac{1}{2}\right) g(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) g'(t) dt = \frac{1}{2} (g(0) + g(1)) - \int_0^1 B_1(t) g'(t) dt. \\ \int_0^1 g(t) dt - \frac{1}{2} (g(0) + g(1)) &= - \int_0^1 B_1(t) g'(t) dt = - [B_2(t) g'(t)]_0^1 + \int_0^1 B_2(t) g''(t) dt \\ &= -b_2 (g'(1) - g'(0)) + [B_3(t) g'(t)]_0^1 - \int_0^1 B_3(t) g^{(3)}(t) dt \\ &= -b_2 (g'(1) - g'(0)) - \int_0^1 B_3(t) g^{(3)}(t) dt. \end{aligned}$$

On obtient la formule proposée par récurrence à l'aide d'intégration par parties, en s'appuyant sur les propriétés des polynômes B_n : $B_n' = B_{n-1}$ ($n \geq 1$) et $B_n(0) = B_n(1) = b_n$ ($n \geq 0$) :

$$\int_0^1 g(t) dt = \frac{1}{2} (g(0) + g(1)) - \sum_{j=1}^p b_{2j} (g^{(2j-1)}(1) - g^{(2j-1)}(0)) - \int_0^1 B_{2p+1}(t) g^{(2p+1)}(t) dt.$$

b) En appliquant la formule précédente à la fonction $g : t \mapsto f(a + t(b - a))$, on obtient :

$$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t) dt = \frac{1}{2} (f(a) + f(b)) - \sum_{j=1}^p b_{2j} (b-a)^{2j-1} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) \\ - (b-a)^{2p+1} \int_a^b B_{2p+1} \left(\frac{u-a}{b-a} t \right) f^{(2p+1)}(u) dt.$$

c) On en déduit la majoration suivante :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{(b-a)}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{j=1}^p b_{2j} (b-a)^{2j} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) \right| \leq (b-a)^{2p+2} M_{2p+1} \beta_{2p+1}$$

d) En remplaçant a et b par x_{k-1} et x_k et $(x_k - x_{k-1})$ par $\frac{b-a}{n}$, on obtient :

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt - \frac{(b-a)}{2n} (f(x_{k-1}) + f(x_k)) + \sum_{j=1}^p b_{2j} \frac{(b-a)^{2j}}{n^{2j}} (f^{(2j-1)}(x_k) - f^{(2j-1)}(x_{k-1})) \right| \text{ majoré par } \\ \frac{(b-a)^{2p+2}}{n^{2p+2}} M_{2p+1} \beta_{2p+1}. \text{ Puis en sommant : } \left(\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt \right)$$

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{(b-a)}{2n} \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)) + \sum_{j=1}^p b_{2j} \frac{(b-a)^{2j}}{n^{2j}} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) \right| \\ \leq \frac{(b-a)^{2p+2}}{n^{2p+1}} M_{2p+1} \beta_{2p+1}.$$

$$\text{Or on a noté } T_n = \frac{(b-a)}{n} \left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2} \right] = \frac{(b-a)}{2n} \left[\sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \right] \text{ donc}$$

l'inégalité précédente s'écrit aussi :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - T_n + \sum_{j=1}^p b_{2j} \frac{(b-a)^{2j}}{n^{2j}} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) \right| \leq \frac{(b-a)^{2p+2}}{n^{2p+1}} M_{2p+1} \beta_{2p+1}.$$

$$\text{Notons } H_n = T_n - \int_a^b f(t) dt - \sum_{j=1}^p b_{2j} \frac{(b-a)^{2j}}{n^{2j}} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a));$$

$$|n^{2p} H_n| \leq \frac{(b-a)^{2p+2}}{n} M_{2p+1} \beta_{2p+1} \text{ donc } H_n = o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

Finalement on peut écrire :

$$T_n = \int_a^b f(t) dt + \sum_{j=1}^p b_{2j} \frac{(b-a)^{2j}}{n^{2j}} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) + H_n \text{ d'où l'on déduit le résultat souhaité : } T_n = \\ \int_a^b f(t) dt + \sum_{j=1}^p b_{2j} \frac{(b-a)^{2j}}{n^{2j}} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right).$$

e) Dans le cas où $p = 2$, la formule donne :

$$T_n = \int_a^b f(t) dt + \frac{1}{12} \frac{(b-a)^2}{n^2} (f'(b) - f'(a)) - \frac{1}{720} \frac{(b-a)^4}{n^4} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$