EPREUVE COMMUNE de MATHEMATIQUES

On considère une fonction continue f, définie d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, et on pose alors :

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

On se propose dans la suite d'étudier la méthode des trapèzes, qui consiste pour approcher cette intégrale I à exploiter la suite (T_n) définie par :

$$T_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) + \frac{f(b)}{2}\right].$$

On notera, dans le cas $n = 1$, que la formule précédente s'écrit $T_1 = (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

Partie I : ***convergence de la suite (T_n) vers l'intégrale I***

1°) <u>Expression de T_{2n} en fonction de T_n</u>

a) Ecrire (en français ou dans un langage) un algorithme permettant de calculer T_n pour $n \geq 1$.

b) Exprimer $2T_{2n} - T_n$ en fonction de $(b - a)/n$ et de valeurs prises par la fonction f.

c) Ecrire un algorithme permettant de calculer $T_1, T_2, T_4, \ldots, T_{2^n}$ lorsque $n \geq 1$ est donné et préciser le nombre d'évaluations de f nécessitées par cet algorithme.

d) *Application : on suppose ici que $[a, b] = [0, 1]$ et que $f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$.*

- Donner la valeur exacte de l'intégrale I dans ce cas particulier.
- Déterminer des valeurs approchées (avec 5 décimales) de T_1, T_2, T_4, T_8, puis évaluer la précision des résultats numériques ainsi obtenus.

2°) <u>Majoration de l'erreur commise dans la méthode des trapèzes</u>

a) On considère une fonction f de classe C^2, définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Etablir que :

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx = \int_a^b f(x)dx - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

b) En déduire la majoration suivante où M_2 désigne un majorant de $|f''|$ sur $[a, b]$:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12}.$$

c) On pose $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$.

En remplaçant a et b par x_{k-1} et x_k dans l'inégalité ci-dessus et en sommant pour $1 \leq k \leq n$, quelle majoration de $|I - T_n|$ obtient-on en fonction de a, b, n et M_2?

Partie II : ***développement limité de T_n quand n tend vers*** $+\infty$

3°) Etude d'une suite de nombres rationnels

a) Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels (b_n) telle que $b_0 = 1$ et

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{b_{n-p}}{p!} = 0 \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 2.$$

b) Etablir que ces nombres b_n sont rationnels et donner b_1, b_2, b_3, b_4 sous forme irréductible.

4°) Etude des polynômes de Bernoulli

a) On considère la suite de polynômes (B_n) définie par :

$$\boldsymbol{B_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad B_n(X) = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_{n-p}X^p}{p!} \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 1.}$$

- Préciser $B_1(X)$, $B_2(X)$, $B_3(X)$, $B_4(X)$.
- Montrer que $B_n'(X) = B_{n-1}(X)$ pour $n \geq 1$ et $B_n(0) = B_n(1)$ pour $n \geq 2$.

b) On considère une suite de polynômes (C_n) définie par :

$$C_0(X) = 1, \quad C_n'(X) = C_{n-1}(X) \text{ pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad C_n(0) = C_n(1) \text{ pour } n \geq 2.$$

- Etablir que $C_n^{(p)}(0) = C_{n-p}(0)$ pour $0 \leq p \leq n$ et en déduire la formule suivante :

$$C_n(X) = \sum_{p=0}^{n} \frac{C_{n-p}(0)X^p}{p!}.$$

- Etablir la formule suivante pour tout nombre entier $n \geq 2$:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{C_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

- Etablir enfin que $C_n(X) = B_n(X)$ pour tout nombre entier naturel n.

c) En déduire que $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et montrer alors que $b_{2p+1} = 0$ si $p \geq 1$.

5°) Développement limité de T_n quand n tend vers $+\infty$

a) On désigne par g une fonction de classe C^{2p+1} pour $p \geq 1$ définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Etablir :

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{2}(g(0)+g(1)) - \sum_{j=1}^{p} b_{2j}(g^{(2j-1)}(1) - g^{(2j-1)}(0)) - \int_0^1 B_{2p+1}(t)g^{(2p+1)}(t)dt.$$

b) On désigne par f une fonction de classe C^{2p+1} définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Qu'obtient-on en appliquant la formule précédente à la fonction $t \to g(t) = f(a + t(b-a))$?

c) On désigne par M_{2p+1} et β_{2p+1} des majorants de $|f^{(2p+1)}|$ sur $[a, b]$ et de $|B_{2p+1}|$ sur $[0, 1]$. En déduire un majorant de l'expression suivante :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{p} b_{2j}(b-a)^{2j}(f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) \right|.$$

d) On pose $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$.

En remplaçant a et b par x_{k-1} et x_k dans l'inégalité ci-dessus et en sommant pour $1 \leq k \leq n$, en déduire que :

$$T_n = \int_a^b f(x)dx + \sum_{j=1}^{p} b_{2j}\frac{(b-a)^{2j}}{n^{2j}}(f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) + o(\frac{1}{n^{2p}}).$$

e) Expliciter la formule obtenue lorsque $p = 2$.