

EPREUVE OPTIONNELLE de PHYSIQUE CORRIGE

I. Thermodynamique

A. Préliminaires

1. a) Le gaz est parfait : dU et dH ne dépendent que de dT :

$$\begin{aligned}dU &= nC_v dT \\dH &= nC_p dT\end{aligned}$$

1. b) La relation entre U et H s'écrit :

$$H = U + PV$$

Soit :

$$dH = du + d(PV) \text{ avec } PV = nRT \text{ soit } d(PV) = nRdT$$

D'où :

$$dH = dU + nRdT$$

Et en explicitant dH et dU :

$$nC_p dT = nC_v dT + nRdT$$

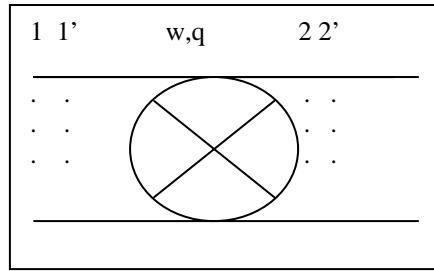
D'où l'on tire :

$$C_p - C_v = R \quad (\text{relation de Mayer})$$

Comme $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$:

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

2. Bilan Système ouvert :



A l'instant t , les pistons sont en 1 et 2.

A l'instant t' , ils sont en 1' et 2'.

Pendant le temps $t'-t$, 1 mole de fluide est entrée en amont.

On est en régime permanent, on en déduit que :

- entre t et t' , 1 mole de fluide est sortie en aval ;

- entre les positions 1' et 2, rien n'a changé ;

Entre t et t' , la variation d'énergie interne est donc :

$$\Delta u = u_2 - u_1$$

Le travail échangé est la somme de :

w : échangée avec la machine

$w_1 = P_1 v_1$: échangée avec l'extérieur en amont

$w_2 = -P_2 v_2$: échangée avec l'extérieur en aval

La chaleur échangée est q

Le premier principe, appliqué entre t et t' s'écrit :

$$u_2 - u_1 = w + q + P_1 v_1 - P_2 v_2$$

Soit :

$$h_2 - h_1 = w + q$$

B. Etude d'un turbopropulseur

1. Le compresseur fonctionne de manière adiabatique et réversible : le fluide suit la loi de Laplace, d'où :

$$PV^\gamma = cte \text{ avec } PV = nRT :$$

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = cte$$

Soit :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

D'où :

$$P_2 = 5 \text{ bars}, P_1 = 1 \text{ bar}, T_1 = 298K$$

$$T_2 = 472K$$

La turbine fonctionne aussi de manière adiabatique et réversible :

$$T_4 = T_3 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \text{ d'où } T_4 = 820,8K$$

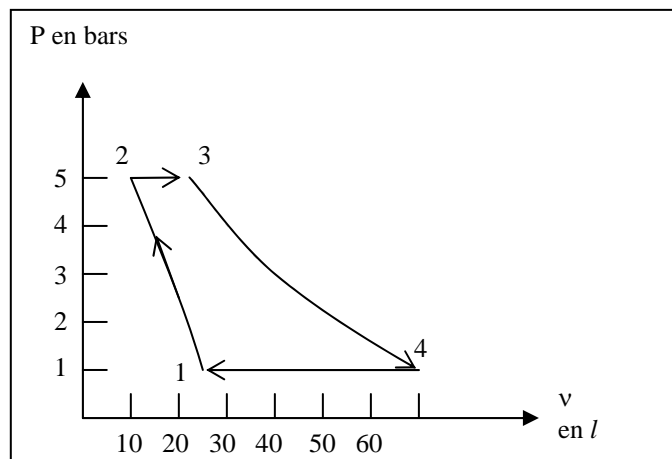
Les volumes se déduisent de l'équation d'état ramenée à 1 mole :

$$v = \frac{RT}{P}$$

Soit :

$$v_1 = 24,77 \text{ l}; v_2 = 7,85 \text{ l}; v_3 = 21,62 \text{ l}; v_4 = 68,2 \text{ l}$$

On en déduit l'allure du cycle dans le plan P, v



2. Pour une transformation réversible de T à T+dT et de P à P+dP, dS s'écrit, pour un gaz parfait :

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - v \frac{dp}{T} \text{ pour une mole}$$

$$\frac{v}{T} = \frac{R}{P} \text{ et } C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

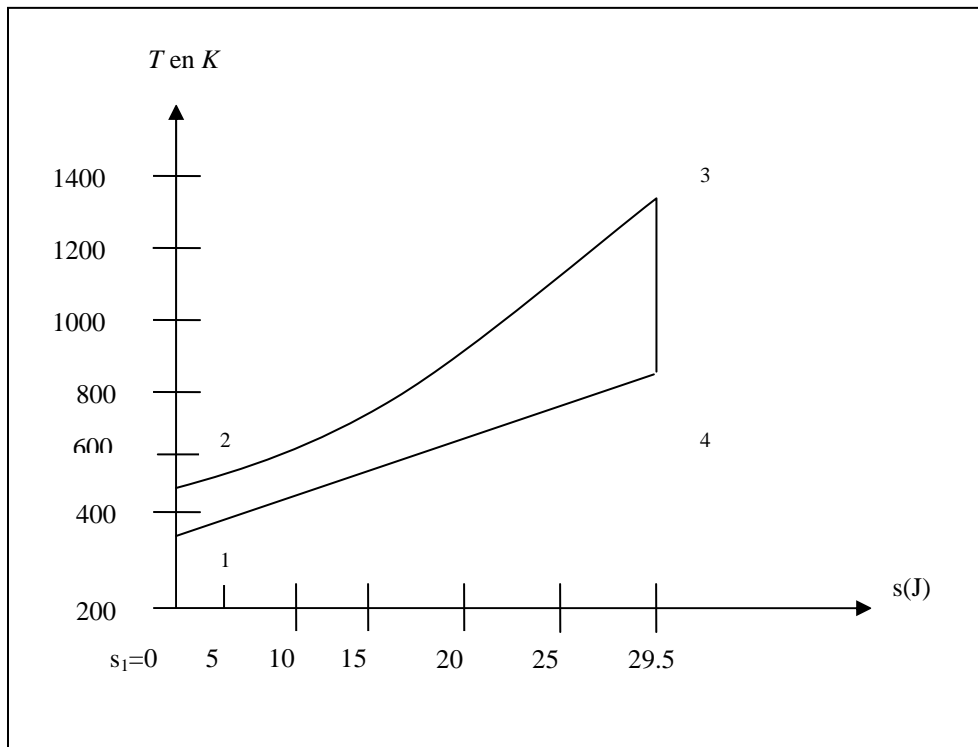
$$s_2 - s_1 = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

De 1 à 2 : la transformation est isentropique : $s_2 = s_1 = 0$.

De 2 à 3 : $s_3 = s_2 + \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right)$ d'où $s_3 = 29,48 \text{ J.K}^{-1}$

De 3 à 4 : isentropique : $s_4 = s_3$

D'où le diagramme ci-contre :



3.a. Si on désigne par h_1 et h_2 les enthalpies molaires du fluide 1 et 2, on a d'après les préliminaires :

$$h_2 - h_1 = w'$$

$$h_2 - h_1 = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$$

d'où :

$$w' = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

Application numérique :

$$w' = \frac{1,4}{0,4} \cdot 8,314 \cdot 298 (5^{\frac{0,4}{1,4}} - 1)$$

D'où :

$$w' = 5062,6 \text{ J}$$

3.b. De la même façon, on a, dans la chambre de combustion :

$$q = h_3 - h_2$$

$$q = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_3 - T_2)$$

Application numérique :

$$q = 24093 \text{ J}$$

3.c. Et dans la turbine :

$$w'' = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_3 \left[\left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

$$w'' = -13944,2 \text{ J}$$

4. Sur l'arbre de la turbine, on récupère $-w''$, et on fournit w' au compresseur. On en déduit :

$$w = -w'' - w'$$

$$w = 8881,6 \text{ J}$$

$$\rho = \frac{w}{q}$$

D'où :

$$\rho = 0,37$$

5. En 1 s, le travail fourni doit être de 700 kJ : il faut donc faire passer dans le moteur n moles de fluide :

$$n = \frac{700000}{8881,6}$$

Soit une masse $D_m = n.M$,

$$D_m = \frac{700}{8881,6} \cdot 29 \text{ kg/s}$$

$$D_m = 2,29 \text{ kg/s}$$

6. En 1 s, le carburant doit fournir :

$$Q = \frac{700000}{0,37} \text{ J}$$

Il en faut donc une masse :

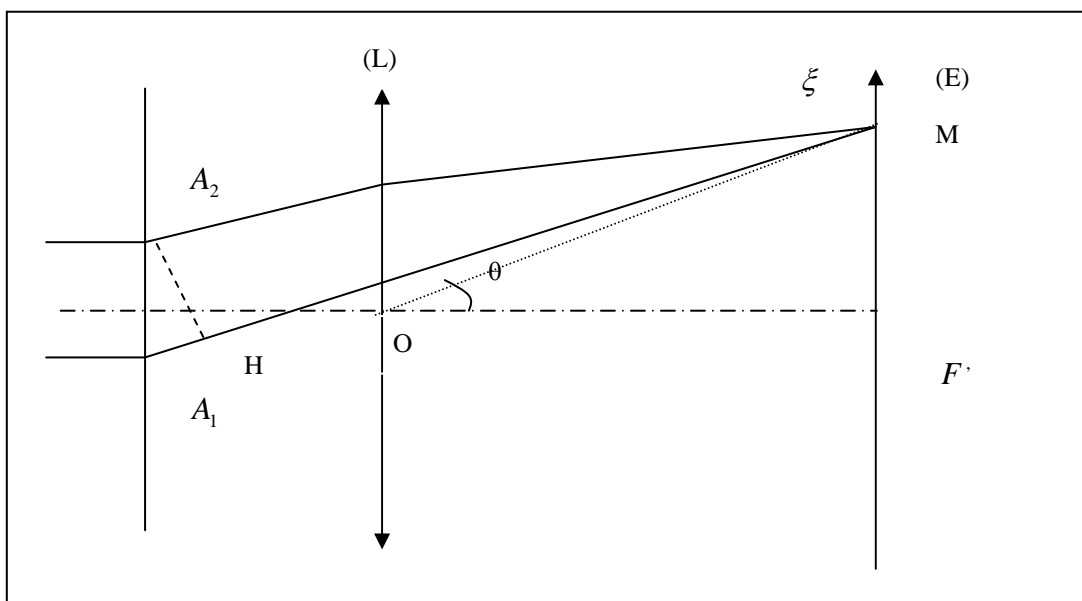
$$\frac{700000}{0,37} \cdot \frac{1}{42600} \text{ kg/s}$$

Soit :

$$\mu = \frac{700000 \cdot 3600}{0,37 \cdot 42600} \text{ kg/heure}$$

$$\mu \cong 160 \text{ kg/heure}$$

II Optique



1.a. $\delta = A_1 H = a \sin \mathcal{G}$ (La lentille n'introduit pas de différence de marche supplémentaire.) On en déduit le déphasage des deux ondes en M :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$$

Soit :

$$\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \mathcal{G}$$

Si \mathcal{G} est faible :

$$\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} \mathcal{G}$$

1.b. $\frac{\xi}{f} = \tan \mathcal{G} \cong \mathcal{G} : \quad \varphi = \frac{2\pi a \xi}{\lambda f}$

En M, les 2 ondes s'écrivent : $s_1 = s_0 e^{j\omega t}$; $s_2 = s_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ d'ou l'onde résultante :

$$s = s_1 + s_2 = s_0 e^{j\omega t} (1 + e^{i\varphi})$$

On en déduit $I = K s s^*$:

$$I = I_0 (1 + \cos \varphi)$$

Soit :

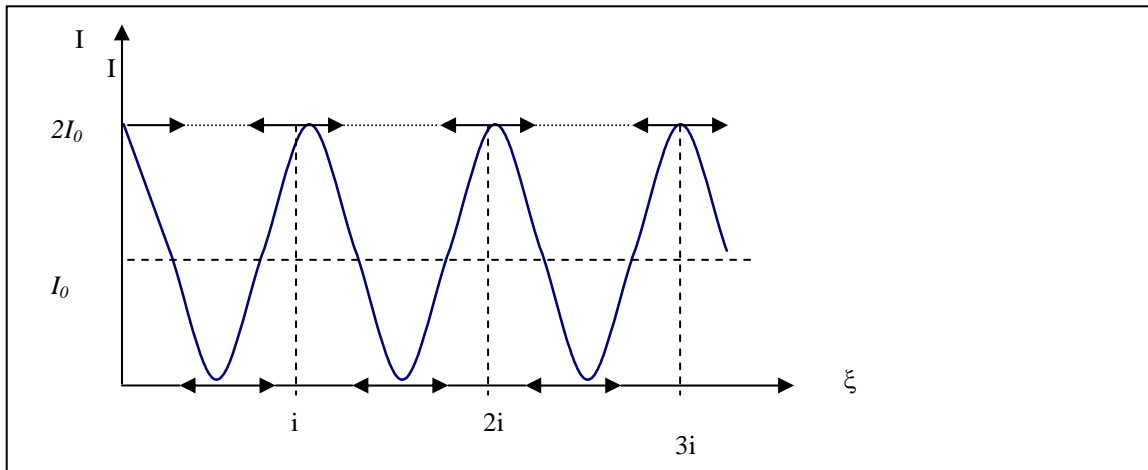
$$I = I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda f} \xi \right) \right)$$

1.c. Application numérique : i est la période de I :

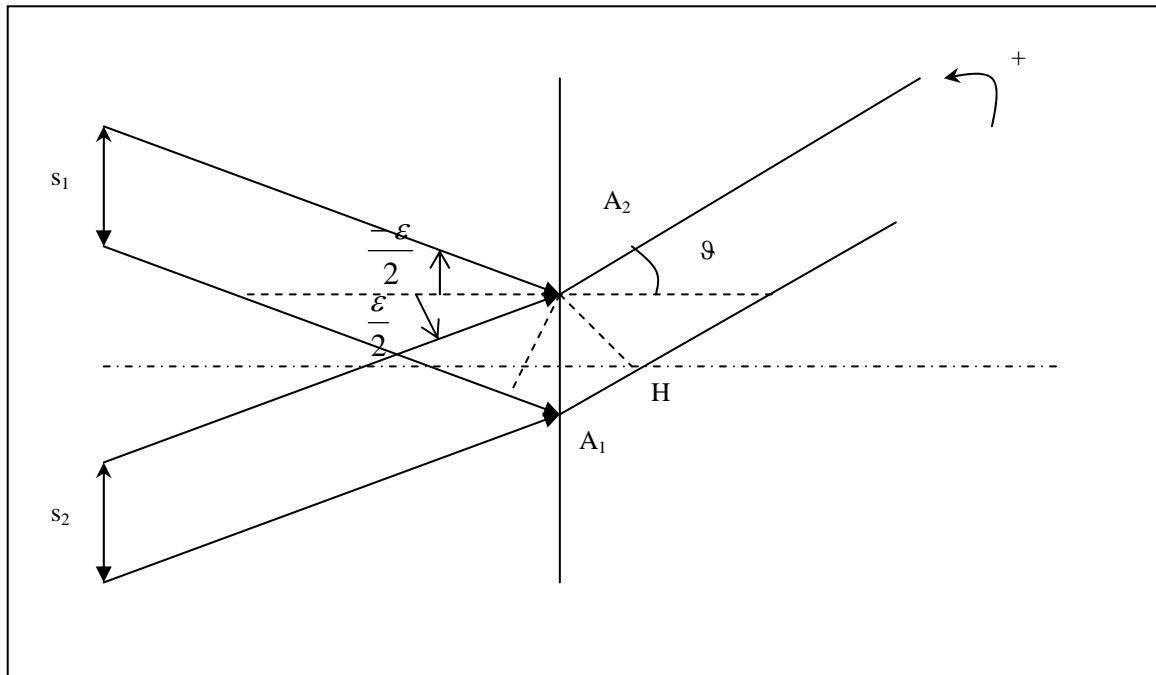
$$i = \frac{\lambda f}{a}$$

$$i = 0,05 \text{ mm}$$

On en déduit la courbe : $i(\xi)$



2.



2.a. Les 2 ondes qui sortent de la lentille dans la direction ϑ ont une différence de marche :

$$\delta_1 = a \sin \vartheta - a \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cong a\left(\vartheta - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Pour celles qui proviennent de S_1 , et :

$$\delta_2 = a \sin \vartheta - a \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cong a\left(\vartheta + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Pour celles qui viennent de S_2 , donnent en M l'intensité :

$$I_1 = I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta_1\right)\right)$$

Et celles qui proviennent de S_2 :

$$I_2 = I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta_2\right)\right)$$

Les 2 sources sont incohérentes : l'intensité résultante est la somme des intensités :

$$I = I_1 + I_2 = I_0 \left(2 + \cos\left(\frac{2\pi\delta_1}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\delta_2}{\lambda}\right)\right)$$

Soit en transformant la somme des cosinus en un produit :

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\delta_2 + \delta_1}{2}\right)\right)$$

En explicitant δ_1 et δ_2 :

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = a \frac{\varepsilon}{2}; \quad \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = a \vartheta$$

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi a \vartheta}{\lambda}\right)\right]$$

Ou en fonction de ξ :

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi a \xi}{\lambda f}\right)\right]$$

2. b.

$$I_{\max} = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda}\right)\right)$$

d'où

$$V = \cos\left(\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda}\right)$$

$$I_{\min} = 2I_0 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda}\right)\right)$$

2.c . Il y a brouillage des franges pour $\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$.

La plus petite valeur de a pour laquelle il y a brouillage correspond à $k = 0$:

$$\frac{a\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

D'où :

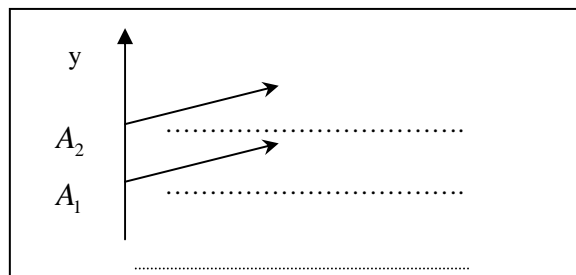
$$a = \frac{\lambda}{2\varepsilon}$$

2.d. $a = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2,4 \cdot 10^{-6}} d'$ où :

$$a = 10,4 \text{ cm}$$

2.e. $a = 1,2 \text{ m} : \varepsilon = \frac{\lambda}{2a} :$

$$\varepsilon = 2,08 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$



3.a. Les ondes provenant des 2 largeurs élémentaires dy d'abscisse y et $y+a$ ont, par rapport à celle émise par A1 dans la même direction, les différences de marche :

$$\delta_1 = y \sin \vartheta \cong y\vartheta$$

$$\delta_2 = (y + a) \sin \vartheta \cong (y + a)\vartheta$$

Elles ont donc, par rapport à cette onde, les phases :

$$\varphi_1 = \frac{2\pi\delta_1}{\lambda} = \frac{2\pi\vartheta y}{\lambda}$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi\vartheta(y + a)}{\lambda}$$

3. b. L'amplitude élémentaire émise par les 2 éléments dy s'écrit :

$$d\alpha = \frac{A}{b} dy [e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2}] e^{i\omega t} = \frac{A}{b} e^{i(\omega t + \varphi_1)} (1 + e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}) dy$$

3.c. Soit, en explicitant les φ :

$$d\alpha = \frac{A}{b} dy [1 + e^{i\frac{2\pi a \mathcal{G}}{\lambda}}] e^{i(\omega t + \frac{2\pi \mathcal{G} y}{\lambda})} dy$$

L'amplitude totale α s'obtient en intégrant en y de $-\frac{b}{2}$ à $\frac{b}{2}$:

$$\alpha = \frac{A}{b} [1 + e^{i\frac{2\pi a \mathcal{G}}{\lambda}}] \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{i(\omega t + \frac{2\pi \mathcal{G} y}{\lambda})} dy$$

On en déduit :

$$I = K s s^*$$

$$\alpha = A \frac{\sin \frac{\pi \mathcal{G} b}{\lambda}}{\frac{\pi \mathcal{G} b}{\lambda}} (1 + e^{i\frac{2\pi a \mathcal{G}}{\lambda}})$$

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(\frac{\pi \mathcal{G} b}{\lambda})}{\frac{\pi \mathcal{G} b}{\lambda}} \right)^2 (1 + \cos(\frac{2\pi a \mathcal{G}}{\lambda}))$$

Soit, avec $\mathcal{G} = \frac{\xi}{f}$ et en posant :

$$u = \frac{\pi \mathcal{G} b}{\lambda} \text{ et } \varphi = \frac{2\pi a \xi}{\lambda f} \text{ ou } u = \frac{\pi b \xi}{\lambda f}$$

On retrouve l'expression proposée.

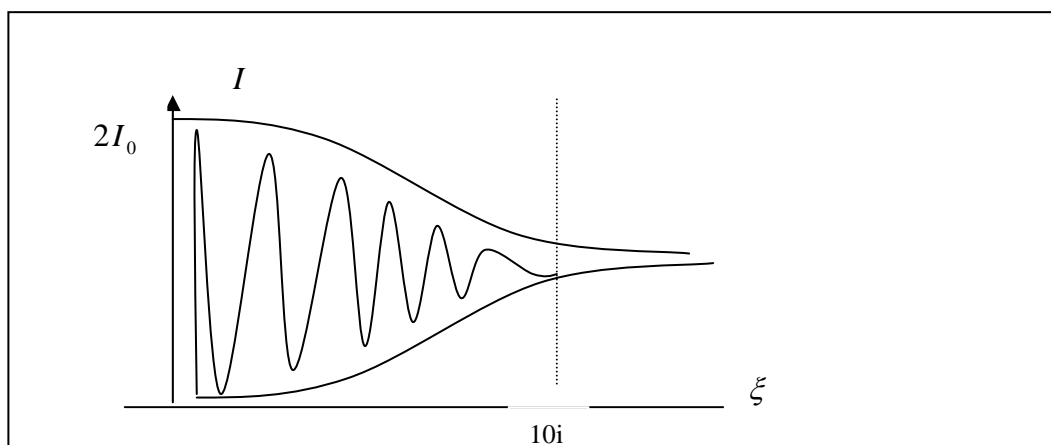
3.d. On retrouve la figure d'interférences de la lère question, avec un terme modulant en $\sin(\frac{\pi b \xi}{\lambda b})$, qui

s'annule la lère fois pour : $\frac{\pi b \xi}{\lambda f} = \pi$.

Soit :

$$\xi = \frac{\lambda f}{b} ; b = \frac{a}{10} ; \xi = 10i$$

D'où l'allure de courbe :



On voit, sans baisse notable des contrastes, au moins 10 franges (5 de part et d'autre : la fonction diffraction ne perturbe pas notablement la figure trouvée en lère question).