# EPREUVE COMMUNE de MATHEMATIQUES
# CORRIGE

## 1. Préliminaire

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+u^2))}{1+u^2}du$ et $H(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \exp(-u^2)du\right)^2$

***a*** **.Montrons que les fonctions *G* et *H* sont $C^1$ sur $\mathbb{R}$.**

- La fonction $g : \mathbb{R}\times [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$(x, u) \mapsto \frac{\exp(-x^2(1+u^2))}{1+u^2}$$ est continue et admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ : $(x, u)$ $\mapsto -2x\exp(-x^2(1+u^2))$ continue sur $\mathbb{R}\times [0, 1]$.

On en conclut que $G$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ G'(x) = -2x\int_0^1 \exp(-x^2(1+u^2))du$$

- La fonction $u \mapsto \exp(-u^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$; on en déduit que la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \exp(-u^2)du$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $h' : x \mapsto \exp(-x^2)$.
  dans ces conditions, $H : x \mapsto (h(x))^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ H'(x) = 2h(x).h'(x) = 2\exp(-x^2)\int_0^x \exp(-u^2)du$$

$$H'(x) = 2\exp(-x^2)\int_0^1 \exp(-x^2t^2).x.dt \quad \text{(chgt de var. } u = x.t\text{ )}$$

$$H'(x) = 2x\int_0^1 \exp(-x^2(1+u^2))du = -G'(x)$$

- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $H'(x) + G'(x) = 0$ ; on en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ H(x) + G(x) = H(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{4}.$$

**b.** $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \exp(-x^2)\displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2u^2)}{1+u^2}du \le \exp(-x^2)\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du \le \exp(-x^2)\frac{\pi}{4}$

On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u^2)du\right)^2$ ($u \mapsto \exp(-u^2)$ intégrable sur $[0, +\infty[$ )

Ainsi on obtient : $\quad I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u^2)du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

## 2. Premières propriétés de la transformée de Fourier *F* de *f*

*a.* $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $|e^{-2i\pi xt}.f(t)| = |f(t)|$ et $t \mapsto |f(t)|$ intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse, donc $F(x)$ défini pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

*b.* $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|F(x)| \le \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$, donc $F$ bornée.

*c.* *Théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre*

- l'application $(x, t) \mapsto e^{-2i\pi xt}.f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $|e^{-2i\pi xt}.f(t)| \leq |f(t)|$, avec $|f|$ intégrable sur $\mathbb{R}$(hypothèse de domination)

  Alors l'application $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

*d.* $T$ est linéaire (immédiat) et $T$ est 1-lipschitzienne :
soient $g_1$, $g_2$ deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$; alors :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|Tg_1(x) - Tg_2(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-2i\pi xt}(g_1(t) - g_2(t)) \right| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| (g_1(t) - g_2(t)) \right| dt$

ce qui implique $\|Tg_1 - Tg_2\|_\infty \leq \|g_1 - g_2\|_1$

### 3. Un premier exemple

$$x\,F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{e^{-2i\pi xt}}{1+t^2}dt = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} x\frac{e^{-2i\pi xt}}{1+t^2}dt$$

$$\int_{-a}^{+a} x\frac{e^{-2i\pi xt}}{1+t^2}dt = \left[\frac{e^{-2i\pi xt}}{-2i\pi}\frac{1}{1+t^2}\right]_{-a}^{a} - \frac{1}{2i\pi}\int_{-a}^{a}\frac{2t\ e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}dt$$

En faisant tendre $a$ vers $+\infty$ dans l'expression précédente, on obtient l'égalité suivante :

$x\,F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{e^{-2i\pi xt}}{1+t^2}dt = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\ e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}dt$ ce qui s'écrit aussi :

$$\pi\, x\, F(x) = i.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\ e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}dt$$

On en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ |F(x)| \leq \frac{1}{\pi|x|}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{t\ e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\right|dt \leq \frac{1}{\pi|x|}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|t|}{(1+t^2)^2}dt \leq \frac{1}{\pi|x|}$$

car $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|t|}{(1+t^2)^2}dt = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{-1}{1+t^2}\right]_0^{+a} = 1$

ainsi $F(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $\pm\infty$.

***b.* Montrons que l'application $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\ e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}dt$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$**

*Théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre*

- l'application $g : (x, t) \mapsto \frac{t\ e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

- l'application $\frac{\partial g}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{-2i\pi t^2 e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{t\ e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\right| \leq \frac{|t|}{(1+t^2)^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$

- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{-2i\pi t^2 e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\right| \leq \frac{2\pi t^2}{(1+t^2)^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$(équivalente à $1/t^2$ en $\pm\infty$)

Alors l'application $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2i\pi t^2 e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt$

La relation (1) permet de donner l'expression suivante de $F(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{i}{\pi x}.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$F$ apparaît comme le produit de deux fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc $F$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

En dérivant la relation précédente, on obtient :

$\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\qquad F'(x) = -\frac{i}{\pi x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt + \frac{i}{\pi x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2i\pi t^2 e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt$

$xF'(x) = -F(x) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt$

or

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)}\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt = F(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt$ .

En reportant dans l'égalité précédente, on en déduit :

$\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ xF'(x) = F(x) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt$ ou $F(x) - xF'(x) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt$

On peut ainsi donner l'expression suivante de $F'(x)$ valable sur $\mathbb{R}^*$ :

$\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ F'(x) = \frac{1}{x}.\left(F(x) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt\right).$

***c.*** Exactement comme précédemment, on montre que la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2i\pi t.e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt = -2\pi\,(\pi\, x\, F(x)).$

Ainsi on obtient :

$\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\qquad F''(x) = \frac{-1}{x^2}\left(F(x) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt\right) + \frac{1}{x}\left(F'(x) + 4\pi^2 x\, F(x)\right)$

$F''(x) = \frac{-1}{x^2}\left(F(x) - x\,F'(x) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2}\,dt\right) + 4\pi^2 F(x)$

$F''(x) = 4\pi^2 F(x).$

$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)}\,dt = \pi$

***d.*** $F$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 4\pi^2 y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.
On en déduit :

- il existe deux constantes réelles $A$ et $B$ telles que : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $F(x) = A\,e^{2\pi x} + B\,e^{-2\pi x}$
- il existe deux constantes réelles $C$ et $D$ telles que : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{-*}$, $F(x) = C\,e^{2\pi x} + D\,e^{-2\pi x}$

Détermination des constantes :
$F(0) = \pi \Rightarrow A + B = \pi$ et $C + D = \pi$ (car $F$ continue en 0)
$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0 \Rightarrow A = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0 \Rightarrow D = 0$

Conclusion :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = \pi\, e^{-2\pi|x|}$$

## 4. Dérivée de la transformée de Fourier et transformée de Fourier de la dérivée

*a.* Montrons que $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(t)dt$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$ lorsque l'application $t \mapsto t\,f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
*Théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre*

- l'application $g : (x, t) \mapsto e^{-2i\pi xt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
- l'application $\dfrac{\partial g}{\partial x} : (x, t) \mapsto -2i\pi t e^{-2i\pi xt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, t \in \mathbb{R}, |e^{-2i\pi xt} f(t)| \le |f(t)|$ intégrable sur $\mathbb{R}$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, t \in \mathbb{R}, |2i\pi t e^{-2i\pi xt} f(t)| \le 2\pi\,|t\,f(t)|$ intégrable sur $\mathbb{R}$

Alors l'application $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(t)dt$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(t)dt\right) = F'(x) = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt}\, t\ f(t)dt$$

On peut généraliser ce résultat aux dérivées successives de $F$ jusqu'à l'ordre $n$ en supposant que la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; alors on a :
$\forall\, k \in \{1,2,\ldots, n\},\ F^{(k)}(x) = (-2i\pi)^k . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} t^k f(t)dt$

*b.* $f'$ étant continue, on peut écrire : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x f'(t)dt$
La fonction $f'$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f$ a une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$.
Sachant que $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $f$ admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$, on déduit que $f$ a pour limites 0 en $\pm\infty$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ Tf'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f'(t)dt = \lim_{a\to+\infty}\left(\left[e^{-2i\pi xt} f(t)\right]_{-a}^{a} + \int_{-a}^{+a} 2i\pi x e^{-2i\pi xt} f(t)dt\right)$$
$$= 2i\pi x . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(t)dt = 2i\pi x . Tf(x)$$

On peut généraliser ce résultat aux dérivées successives de $f$ jusqu'à l'ordre $n$ en supposant que les dérivées successives de $f$ jusqu'à l'ordre $n$ sont toutes intégrables sur $\mathbb{R}$;
alors on a :
$\forall\, k \in \{1,2,\ldots, n\},\ Tf^{(k)}(x) = (2i\pi x)^k .\ Tf(x)$.

## 5. Un deuxième exemple

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} e^{-\pi t^2} dt$$

*a.* $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f'(t) = -2\pi t\, f(t)$; ainsi $\lim\limits_{t\to\pm\infty} t^2 f'(t) = 0$ donc $f'$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
D'après la question précédente, on a le résultat suivant :
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F'(x) = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} t\ f(t)dt = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f'(t)dt = i\,(2i\pi x . F(x))$.
Ainsi $F$ vérifie l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$ : $y' = -2\pi x . y$.

*b*. On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \lambda\ e^{-\pi x^2}$ , avec $\lambda = F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,dt$ = 1 d'après la première question.

( $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\dfrac{du}{\sqrt{\pi}}$ ).

En conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = e^{-\pi x^2}$ .

**6. Limites en $\pm\infty$ de la transformée de Fourier**

*a*. $\int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt}\varphi(t)dt = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{-a_k}^{a_k} e^{-2i\pi xt}\varphi_k\,dt = \sum_{k=0}^{p-1}\dfrac{-\varphi_k}{2i\pi x}(e^{-2i\pi x a_{k+1}} - e^{-2i\pi x a_k})$

On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt}\varphi(t)dt\right) = 0$

*b*. $|F(x) - \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt} f(t)dt\,| = |\int_{-\infty}^{-A} e^{-2i\pi xt} f(t)dt + \int_{A}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(t)dt\,|$

$$\leq \int_{-\infty}^{-A}|f(t)|dt + \int_{A}^{+\infty}|f(t)|dt$$

La fonction $|f|$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un réel $A$ tel que $\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|dt$ + $\int_{A}^{+\infty}|f(t)|dt \leq \varepsilon$, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |F(x) - \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt} f(t)dt\,| \leq \varepsilon$$

*c*. *Théorème*

Toute fonction continue sur un segment peut être approchée uniformément par une suite de fonctions en escalier.
(conséquence de la continuité uniforme, non au programme en filière PC ou PT).

Cela signifie qu' à tout réel $\varepsilon > 0$ on peut associer une fonction $\varphi$ en escalier sur le segment $[-A, A]$ telle que : $\forall x \in [-A, A]$, $|f(x) - \varphi(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2A}$

*d*. Montrons que $F(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il s'agit de montrer qu'on peut associer un réel $M$ à cet $\varepsilon$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x > M \Rightarrow |F(x)| \leq \varepsilon.$$

Quels que soient le réel $A$ et la fonction $\varphi$ en escalier sur $[-A, A]$, on peut écrire :
$F(x) = F(x) - \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt} f(t)dt + \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt} f(t)dt - \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt}\varphi(t)dt + \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt}\varphi(t)dt$
d'où l'inégalité suivante :
$|F(x)| \leq |F(x) - \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt} f(t)dt\,| + \int_{-A}^{A}|f(t) - \varphi(t)|dt + |\int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt}\varphi(t)dt\,|$.

Choisissons tout d'abord le réel $A$ tel que $|F(x) - \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt} f(t)dt\,| \leq \varepsilon/3$
ce qui est possible d'après la question *b*.

$A$ étant fixé, on choisit une fonction $\varphi$ en escalier sur le segment $[-A, A]$ telle que :
$\forall t \in [-A, A]$, $|f(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon/3$ (ce qui est possible d'après la question *c*).

De l'inégalité précédente , on déduit alors l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |F(x)| \leq 2\varepsilon/3 + |\int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt}\varphi(t)dt\,|.$$

D'après la question *a*, on sait qu'il existe un réel $M$ tel que :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ x > M \Rightarrow \left| \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi xt} \varphi(t)dt \right| \leq \varepsilon/3.$

Conclusion : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x > M \Rightarrow |F(x)| \leq \varepsilon$.

On démontrerait exactement de la même façon que $F(x) \to 0$ quand $x$ tend vers $-\infty$.