EPREUVE OPTIONNELLE de PHYSIQUE
CORRIGE

Premier exercice :

A - Préliminaire

1. La masse de la terre à la symétrie physique : d'après le théorème de Gauss, tout se passe, pour un point extérieur à la distribution, comme si on avait une masse ponctuelle en O :

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{Mm}{(R+h)^2}\vec{u}_r}$$

A l'altitude 0 :

$$\vec{F} = -mg_0\vec{u}_r = -G\frac{Mm}{R^2}\vec{u}_r \qquad GM = g_0R^2$$

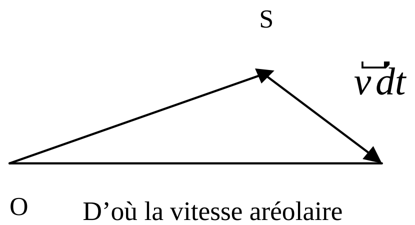
$$\boxed{\vec{F} = -\frac{mg_0R^2}{(R+h)^2}\vec{u}_r}$$

2.
a/
Le moment cinétique d S en O, soit $\vec{\sigma}_0$ s'écrit :

$$\vec{\sigma}_0 = \vec{OS} \wedge m\vec{v} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{OS} \wedge \vec{F} = \vec{0} \text{ (force centrale)}$$

$\vec{\sigma}_0 = \vec{cte}$ perpendiculaire au plan $\vec{OS},\vec{v}$ (plan du mouvement) : le mouvement s'effectue dans le plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}_0$

b/



L'aire balayée pendant dt par le rayon vecteur s'écrit :

$$dA = \frac{1}{2}\left\|\vec{OS} \wedge \vec{v}\right\|dt = \left\|\frac{\vec{\sigma}_0}{2m}\right\|dt$$

D'où la vitesse aréolaire

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \left\|\frac{\vec{\sigma}_0}{2m}\right\|dt = cte}$$

Le mouvement s effectue selon la loi des aires

B - Orbite géostationnaire

1/
a/
Dans le repère de Frenet, sur l'axe normal, la RFD s'écrit :

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{mg_0R^2}{r^2} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{g_0R^2}{R+h}}}$$

b/
Le satellite fait un tour pendant le temps T à la vitesse constante v :

$$vT = 2.\pi.r \qquad \boxed{T = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{R\sqrt{g_0}}}$$

Son énergie potentielle s'écrit

$$E_p = -G\frac{Mm}{R+h} = -\frac{mg_0R^2}{(R+h)}$$

et son énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mg_0R^2}{2(R+h)}$$

$$E = E_p + E_c \qquad \boxed{E = -\frac{mg_0R^2}{2(R+h)}}$$

c/

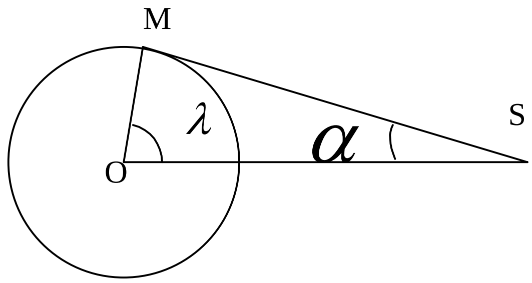
L'orbite doit être dans le plan de l'équateur terrestre

$$T_g = 24h = 86400s \qquad \left[(R+h_g) = R\sqrt{g_0}\frac{T_g}{2\pi}\right]^{2/3}$$

$$\boxed{h_g = 35954km \approx 36000km} \qquad \boxed{v_g = 3{,}08km/s}$$

2/

a/



A la limite de visibilité, le satellite est vu à l'horizontale locale : MS est perpendiculaire à la verticale locale OM

$$\cos\lambda = \frac{OM}{OS} = \frac{R}{r}$$

$$\boxed{\lambda = 81{,}3°}$$

b/

En fait, il faut que l'angle $O\hat{M}S$ soit de 95°. La latitude λ devient λ'

Dans le triangle OMS :

$$\frac{OM}{\sin\alpha} = \frac{OS}{\sin 95} \qquad \sin\alpha = \frac{R}{r}\sin 95$$

$$\alpha = 8{,}692° \qquad \lambda' = 180 - 95 - \alpha = 85 - \alpha$$

$$\boxed{\lambda' = 76°}$$

On aurait pu dire tout de suite que : $\lambda' = \lambda - 5°$

c/

R+h est proportionnel à $T^{2/3}$. Si h est l'altitude du géostationnaire, et h, celle recherchée :

$$\frac{R+h_0}{R+h_g} = \left(\frac{T_0}{T_g}\right)^{2/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$$

$$\boxed{h_0 = 20280km}$$

C/Lancement du satellite

1/

Conservation de l'énergie : l'énergie E du satellite est égale à son énergie initiale :

$$E = \frac{1}{2} m v_0^{\ 2} - \frac{G M_T m}{R} = \frac{1}{2} m v_0^{\ 2} - m g_0 R$$

à l'apogée $r_A = R + h_A = 6700\,km$

$$\frac{1}{2} m v_l^{\ 2} - m g_0 R = \frac{1}{2} m v_A^{\ 2} - g_0 \frac{R^2}{r_A} m$$

$$\boxed{v_A^{\ 2} = v_l^{\ 2} - 2 g_0 R \left(1 - \frac{R}{r_A}\right)} \qquad \boxed{v_A = 3{,}22\,km/s}$$

Il y a conservation du moment cinétique en O, de module :

$R m v_l \cos\alpha$ au départ et $m v_A r_A$ à l'apogée : $v_A r_A = R v_l \cos\alpha$: $\cos\alpha = \dfrac{r_A v_A}{R v_0}$

$$\boxed{\cos\alpha = 0{,}842} \qquad \boxed{\alpha = 32{,}57°}$$

2/

Soit OA l'axe polaire origine : par rapport à cet axe, l'équation de l'ellipse s'écrit :

$$r = \frac{p}{1 - 2\cos\theta} \qquad r_A = \frac{p}{1-e} \quad \text{et} \quad r_p = \frac{p}{1+e}$$

Le grand axe de l'ellipse a s'écrit : $a = \left(r_A + r_p\right)\frac{1}{2}$

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

L'énergie E s'écrit, en fonction de a :

$$E = -\frac{m g_0 R^2}{2a} = -\frac{m g_0 R^2 \left(1 - e^2\right)}{2p} \quad \text{et} \quad p = r_A (1-e) \qquad E = -\frac{m g_0 R^2 (1+e)}{2 r_A}$$

on en déduit

$$1 + e = -\frac{2 r_A}{m g_0 R^2} \left[\frac{1}{2} m v^2 - m g_0 R\right]$$

$$\boxed{1 + e = -r_A . \frac{v_0^{\ 2} - 2 g_0 R}{g_0 R^2}} \qquad \boxed{e = 0{,}827}$$

$$\boxed{p = r_A (1-e)} \qquad \boxed{p = 1159 km}$$

d'où l'équation de l'ellipse $r = \dfrac{1159}{1 - 0{,}827\cos\varphi}$ en km.

3/

En orbite circulaire de rayon

$$v_1^{\ 2} = g_0 \frac{R^2}{r_A}$$

$$\boxed{v_1 = 7{,}74\,km/s} \qquad \boxed{\Delta v_1 = 4{,}52\,km/s}$$

4/

Si a est le demi grand axe de l'ellipse, l'énergie s'écrit :

$$E = -\frac{m g_0 R^2}{2a}$$

l'orbite circulaire basse à un rayon r_A : $E_1 = -\dfrac{mg_0R^2}{2r_A}$

l'orbite de transfert à un grand axe $a_t = \dfrac{1}{2}(r_A + r_1)$: l'énergie s'écrit:

$$E_t = -\frac{mg_0R^2}{2a_t}$$
$$\frac{E_t}{E_1} = \frac{a_1}{a_t} = \frac{2r_A}{r_A - r_1}$$
$$E_t - E_1 = E_1\left[2\frac{r_A}{r_A + r_1} - 1\right]$$

La variation de vitesse étant quasi instantanée, l'énergie potentielle ne change pas :

$$E_t - E_1 = \frac{1}{2}mv_t^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_1^{\ 2}$$

$$\boxed{v_t^{\ 2} = v_1^{\ 2} + \frac{g_0R^2}{r_A}\left(1 - \frac{2r_A}{r_A + r_1}\right)} \qquad \boxed{v_t = 9{,}79km/s}$$

La conservation du moment cinétique s'écrit:

$$v'_t.r_0 = v_t.r_A$$

$$\boxed{v'_t = v_t.\frac{r_A}{r_0}} \qquad \boxed{v'_t = 2{,}46km/s}$$

Deuxième exercice :

1) Par hypothèse, les ions et les électrons ne sont soumis qu'à la force électrique.
On peut donc écrire :

$$m_e.\frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e.\vec{E} \qquad m_i.\frac{d\vec{v}_i}{dt} = e.\vec{E}$$

En régime sinusoïdal forcé de pulsation ω, $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = i\omega.\vec{v}$.

On en déduit :

$$i.m_e.\omega.\vec{v}_e = -e.\vec{E} \qquad i.m_i.\omega.\vec{v}_i = e.\vec{E}$$

Soit :

$$\boxed{\vec{v}_e = \frac{-e.\vec{E}}{i.m_e.\omega}} \qquad \boxed{\vec{v}_i = \frac{-e.\vec{E}}{i.m_i.\omega}}$$

1) La densité du courant $\vec{j}$ s'écrit, par définition :

$$\vec{j} = -N.e.\vec{v}_e + N.e.\vec{v}_i$$

Soit, en explicitant $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_i$: $\vec{j} = \dfrac{N.e^2}{i.\omega}\left(\dfrac{1}{m_e} + \dfrac{1}{m_i}\right).\vec{E}$

Comme $m_i >> m_e$, $\dfrac{1}{m_i} << \dfrac{1}{m_e}$. $\vec{j}$ s'écrit donc, de manière simplifiée : $\boxed{\vec{j} = \dfrac{N.e^2}{i.m_e.\omega}.\vec{E}}$

3) La puissance volumique p dissipée dans le milieu s'écrit, par hypothèse :

$$p=\vec{j}.\vec{E} \qquad p=j.E \qquad (\vec{j} \text{ et } \vec{E} \text{ sont colinéaires })$$

pour exprimer p instantanée, il faut repasser en représentation réelle :

$$\boxed{\vec{E}=E_0.\cos(\omega t-kx).\vec{u}_z}$$

$$\vec{j}=\frac{N.e^2}{m_e.\omega}.E_0.\cos(\omega t-kx-\frac{\pi}{2}).\vec{u}_x$$

$$=\frac{N.e^2}{m_e.\omega}.E_0^{\ 2}.\sin(\omega t-kx).\vec{u}_x$$

$$\boxed{p=\frac{N_e^{\ 2}}{m_e.\omega}.E_0^{\ 2}.\sin(\omega t-kz).\cos(\omega t-kz)}$$

$\boxed{\langle p\rangle=0}$ pas de dissipation d'énergie dans le milieu.

Ce résultat est cohérent avec les hypothèses de départ.

4) Dans le milieu, $\rho=0$. On en déduit :

$$div\vec{E}=0 \qquad div\vec{B}=0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_o.\left(\vec{j}+\varepsilon_o.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right)=\overrightarrow{grad}\left(div\vec{E}\right)-\Delta\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right)=-\mu_o.\left[\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}+\varepsilon_o.\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right]$$

$$\overrightarrow{grad}\left(div\vec{E}\right)=\vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{j}=\frac{N.e^2}{i.m_e.\omega}.\vec{E} \quad ; \quad \mu_o.\varepsilon_o=\frac{1}{c^2}$$

$$\Delta\vec{E}-\frac{\mu_o.N_e^{\ 2}}{i.m_e.\omega}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\frac{1}{e^2}.\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

Si $\vec{E}=E_o.e^{i(\omega t-kx)}\vec{u}_z$: $\Delta\vec{E}=-k^2\vec{E}$, $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=i.\omega.\vec{E}$

et $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\omega^2.\vec{E}$

L'équation précédente s'écrit alors :

$$k^2-\frac{\omega^2}{c^2}+\frac{\mu_o.N.e^2}{m_e}=0 \qquad \text{soit, avec } \frac{N.e^2}{m_e}=\varepsilon_o.\omega_p^{\ 2}$$

$$k^2-\frac{\omega^2}{c^2}+\mu_o.\varepsilon_o.\omega_p^{\ 2}=0 \qquad \mu_o.\varepsilon_o=\frac{1}{c^2}$$

$$k^2=\frac{\omega^2-\omega_p^{\ 2}}{c^2}$$

L'onde se propage si k est réel, donc si $k^2 > 0$. Il faut que :

$$\omega > \omega_p \quad \text{soit} \quad f > f_0 \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}.\sqrt{\frac{N.e^2}{\varepsilon_o.m_e}}$$

A.N. : $f_0 = 8{,}92 \quad MHz$

4) Par définition, $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ $\qquad \dfrac{k^2}{\omega^2} = \dfrac{1}{v_\varphi} = \dfrac{1}{c^2}\left(1 - \dfrac{\omega_p{}^2}{\omega^2}\right)$

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}}} \quad \text{ou} \quad v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{f_0{}^2}{f^2}}}$$

en différenciant l'équation de dispersion, on obtient :

$$2k.dk = \frac{1}{c^2}.2\omega.d\omega \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{e^2.k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi}$$

$$v_\varphi.v_g = c^2 \qquad v_g = c.\sqrt{1 - \frac{f_0{}^2}{f^2}}$$

Par définition : $n = \dfrac{e}{v_\varphi}$ d'où $n = \sqrt{1 - \dfrac{f_0{}^2}{f^2}}$

5) Soit r l'angle de réfraction : la 2ème loi de Descartes relative à la réfraction s'écrit :

$$\sin(i) = n.\sin(r) \quad \text{soit} \quad \sin(r) = \frac{\sin(i)}{n}$$

Pour qu'il n'y ait pas de réfraction totale, il faut que $\dfrac{\sin(i)}{n} < 1$

$$n > \sin(i) \qquad \sqrt{1 - \frac{f_0{}^2}{f^2}} > \sin(i)$$

Soit :

$$1 - \frac{f_0{}^2}{f^2} > \sin^2(i) \qquad f > \frac{f_0}{\cos(i)}$$

A.N. : $f > 102{,}3 \quad MHz$

La fréquence GPS, environ 10 fois plus grande, est peu perturbée par l'ionosphère.