EPREUVE COMMUNE de MATHEMATIQUES
CORRIGE

Transformée de Fourier discrète

1°) <u>Etude du cas particulier $n = 4$</u>

Dans ce cas $\omega_n = \omega_4 = i$.

1.a. $F_4(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0+a_1+a_2+a_3,\ a_0+a_1 i- a_2-a_3 i,\ a_0-a_1 + a_2-a_3,\ a_0-a_1 i- a_2+a_3 i)$

1.b. $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$

1.c. $M_4 \times \overline{M_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 I_4$.

On en déduit que F_4 est inversible et que F_4^{-1} a pour matrice représentative $\frac{1}{4}\overline{M_4}$; ainsi F_4^{-1} est l'endomorphisme de C^4 qui à tout 4-uplet (a_0, a_1, a_2, a_3) associe le 4-uplet suivant :

$\frac{1}{4}(a_0+a_1+a_2+a_3,\ a_0-a_1 i- a_2+a_3 i,\ a_0-a_1+a_2-a_3,\ a_0+a_1 i- a_2-a_3 i)$.

1.d. $M_4 \times M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$M_4^4 = M_4^2 \times M_4^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 4^2 I_4.$$

2. Etude du cas général

2.a. F_n endomorphisme de C^n est bijectif si et seulement si Ker $F_n = \{0\}$.

$(a_0, a_1,..., a_{n-1}) \in$ Ker $F_n \Rightarrow A(1) = A(\omega_n) = ... = A(\omega_n^{n-1}) = 0$

$\Rightarrow$ le polynôme A admet pour racines les n racines $n^{ièmes}$ de l'unité ;

ainsi A polynôme de degré $\leq n-1$ a au moins n racines distinctes donc A est le polynôme nul et $(a_0, a_1,..., a_{n-1}) = (0, 0,..., 0)$.

2.b. $i = j \Rightarrow \omega_n^{i-j} = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{i}\text{-}\mathrm{j})})^k = n.$

$i \neq j \Rightarrow \omega_n^{i-j} \neq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{i}\text{-}\mathrm{j})})^k = \dfrac{1-(\omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{i}\text{-}\mathrm{j}})^n}{1-\omega_n} = 0.$

$$\|F_n(a)\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left|A(\omega_n^k)\right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i \overline{a_j}\ \omega_n^{(i-j)k} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i \overline{a_j}\ (\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{(i-j)k}) = n. \sum_{i=0}^{n-1} \left|a_i\right|^2$$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \left|A(\omega_n^k)\right|^2 = \mathrm{n}\left|a\right|^2$ c'est à dire $\|F_n(a)\| = \sqrt{n}\ \|a\|$.

2.c. M_n matrice de F_n dans la base canonique de C^n :

$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & . & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & . & \omega_n^{2(n-1)} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & . & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$, c'est à dire que la colonne d'indice j de M_n est égale

à $C_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^{j-1} \\ \omega_n^{2(j-1)} \\ . \\ \omega_n^{(n-1)(j-1)} \end{pmatrix}$.

2.d. La $i^{ième}$ ligne de M_n est égale à $(1\ \ \omega_n^{i-1}\ \ \omega_n^{2(i-1)}\ .\ \omega_n^{(n-1)(i-1)})$ et la $j^{ième}$ colonne de $\overline{M}_n$

est égale à $\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{\omega_n^{j-1}} \\ \overline{\omega_n^{2(j-1)}} \\ . \\ \overline{\omega_n^{(n-1)(j-1)}} \end{pmatrix}$.

On en déduit que $M_n \times \overline{M_n} = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$ avec $a_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{k(i-1)} \overline{\omega_n^{k(i-1)}}$.

Si $i = j$ alors $a_{ii} = \mathrm{n}$ et si $i \neq j$ alors $a_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{k(i-j)} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^{k(i-j)})^2 = \dfrac{1-(\omega_{\mathrm{n}}^{\mathrm{i}\text{-}\mathrm{j}})^n}{1-\omega_n} = 0.$

Conclusion : $M_n \times \overline{M_n} = n.I_n$.

On en déduit que F_n^{-1} est l'endomorphisme de C^n admettant pour matrice représentative dans la base canonique de C^n la matrice $\frac{1}{4}\overline{M_n}$; on peut aussi définir F_n^{-1} de la façon suivante :

$F_n^{-1} : C^n \quad \to \quad C^n$

$(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \mapsto \frac{1}{n}(A(1), A(\overline{\omega_n}), ..., A(\overline{\omega_n^{n-1}}))$.

2.e. $M_n^2 = M_n \times M_n = (b_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ avec $b_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{k(i-1)}\omega_n^{k(j-1)} = \sum_{k=0}^{n-1}(\omega_n^{i+j-2})^k$

Ainsi deux cas se présentent :

♦ $\omega_n^{i+j-2} \neq 1$ alors $\sum_{k=0}^{n-1}(\omega_n^{i+j-2})^k = \dfrac{1-(\omega_n^{i+j-2})^n}{1-\omega_n^{i+j-2}} = 0$

♦ $\omega_n^{i+j-2} = 1$ alors $\sum_{k=0}^{n-1}(\omega_n^{i+j-2})^k = n$.

Conclusion :

$M_n^2 = (b_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ avec $b_{ij} = 0$ si $i + j - 2 \neq 0\ [n]$, 0 sinon.

donc $b_{11} = n$, $b_{i\, n+2-i} = n$ pour $i \in \{2, ..., n\}$ et les autres coefficients sont nuls.

$$M_n^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & n \\ 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & n & . & . \\ 0 & n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $M_n^4 = n^2 I_n$.

M_n admet le polynôme $X^4 - n^2$ pour polynôme annulateur (polynôme scindé à racines simples) donc M_n et F_n sont diagonalisables et les valeurs propres sont nécessairement racines du polynôme annulateur donc éléments de $\{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$.

3.b . $F_n(e_1 + e_{n-1}) = \begin{pmatrix} 2 \\ \omega_n + \omega_n^{n-1} \\ . \\ . \\ \omega_n^{n-1} + \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} = 2u$.

$$F_n(u) = \frac{1}{2} F_n^2(e_1 + e_{n-1}) = \frac{ne_{n-1} + ne_1}{2} = \frac{n}{2}(e_1 + e_{n-1}).$$

$$F_n(e_1 - e_{n-1}) = \begin{pmatrix} 2 \\ \omega_n - \omega_n^{n-1} \\ . \\ . \\ \omega_n^{n-1} - \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} = 2iv .$$

$$F_n(v) = \frac{1}{2i} F_n^2(e_1 - e_{n-1}) = \frac{-n}{2i}(e_1 - e_{n-1}).$$

On en déduit :

$$F_n\left(\frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 + e_{n-1}) + u\right) = \sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 + e_{n-1}) + u\right).$$

$$F_n\left(\frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 + e_{n-1}) - u\right) = -\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 + e_{n-1}) + u\right).$$

$$F_n\left(\frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 - e_{n-1}) + v\right) = i\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 - e_{n-1}) + v\right).$$

$$F_n\left(\frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 - e_{n-1}) - v\right) = -i\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{2}(e_1 - e_{n-1}) - v\right).$$

Ainsi chacune des valeurs $\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$, $i\sqrt{n}$, $-i\sqrt{n}$ est valeur propre.

4. a Montrons qu'à la fin l'algorithme, on obtient $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = F_n(a)$.

- $p = 0 \Rightarrow$ $F = \gamma_0, \alpha_0 = \beta_0 + \gamma_0, \alpha_{\frac{n}{2}} = \beta_0 - \gamma_0, E = \omega_n$.
- $p = 1 \Rightarrow$ $F = \gamma_1\omega_n, \alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1\omega_n, \alpha_{\frac{n}{2}+1} = \beta_1 - \gamma_1\omega_n, E = \omega_n^2$.
- p quelconque $\Rightarrow F = \gamma_p\omega_n^p, \alpha_p = \beta_p + \gamma_p\omega_n^p, \alpha_{\frac{n}{2}+p} = \beta_p - \gamma_p\omega_n^p, E = \omega_n^{p+1}$.

$$\forall p \in \left\{0, \quad 1, \quad \dots, \quad \frac{n}{2} - 1\right\},\ \alpha_p = \beta_p + \gamma_p\omega_n^p \ ;$$

or $\beta_p = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2j}\omega_{\frac{n}{2}}^{jp} = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2j}(\omega_n^p)^{2j}$ et $\gamma_p\omega_n^p = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2j+1}\omega_{\frac{n}{2}}^{jp}\omega_n^p = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2j+1}(\omega_n^p)^{2j+1}$.

on en déduit : $\forall p \in \left\{0, \quad 1, \quad \dots, \quad \frac{n}{2} - 1\right\}$, $\alpha_p = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k(\omega_n^p)^k = A(\omega_n^p)$.

$\forall p \in \left\{0, \quad 1, \quad \dots, \quad \frac{n}{2}-1\right\}$, $\alpha_{\frac{n}{2}+p} = \beta_p - \gamma_p \omega_n^p$;

or $\omega_n^{\frac{n}{2}} = -1 \Rightarrow \omega_n^{\frac{n}{2}+p} = -\omega_n^p$.

on en déduit : $\forall p \in \left\{0, \quad 1, \quad \dots, \quad \frac{n}{2}-1\right\}$, $\alpha_{\frac{n}{2}+p} = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k (\omega_n^{\frac{n}{2}+p})^k = A(\omega_n^{\frac{n}{2}+p})$.

Ainsi : $\forall p \in \{0, \quad 1, \quad \dots, \quad n-1\}$, $\alpha_p = A(\omega_n^p)$ c'est à dire $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = F_n(a)$.

4.b . $\forall N \in \mathbb{N}, N > 0$, $u_N = 2u_{N-1} + 2^{N+1}$.

On en déduit par récurrence ($u_0 = 0$) que $u_N = N2^{N+1} = 2n\frac{\ln n}{\ln 2}$.

5.a . $F_n(p).F_n(q) = (P(1)Q(1), P(\omega_n)Q(\omega_n), \dots, P(\omega_n^p)Q(\omega_n^p), \dots, P(\omega_n^{n-1})Q(\omega_n^{n-1}))$

$= (R(1), R(\omega_n), \dots, R(\omega_n^p), \dots, R(\omega_n^{n-1})) = F_n(p * q)$.

5 .b . Calcul de $F_n(p)$ $\rightarrow u_N$ opérations

Calcul de $F_n(q)$ $\rightarrow u_N$ opérations

Calcul de $F_n(p).F_n(q)$ $\rightarrow n$ opérations

Calcul de $F_n^{-1}(F_n(p * q))$ $\rightarrow u_N + n$ opérations (car $F_n^{-1} = \frac{1}{n}\overline{F_n}$)

Par cette méthode, le calcul de $p * q$ (ou de $P.Q$) nécessite $3u_N + 2n$ opérations

$3u_N + 2n = 3(2n\frac{\ln n}{\ln 2}) + 2n$ qui est équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ à : $6n\frac{\ln n}{\ln 2}$.

La méthode usuelle de calcul du produit $P.Q$ nécessite $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n(n-1) + n = n^2$.