**EPREUVE COMMUNE de MATHEMATIQUES**
**CORRIGE**

## Problème 1 :

**1.a**

$\forall P \in \Re_{2n}[X]$, T(P) $\in \Re_{2n}$ [X] , en effet :

P = $\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ , T(P) = Q = $\sum_{k=1}^{2n+1} a_{k-1} X^k$ - $\sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(k-1)}{2n} a_{k-1} X^k + \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(k+1)}{2n} a_{k+1} X^k$

Le coefficient de $X^{2n+1}$ est $a_{2n} - a_{2n} = 0$ , donc T(P) $\in \Re_{2n}[X]$

T est linéaire . Donc $T \in L(\Re_{2n}[X])$ .

**1.b**

$\forall P \in$ Ker T $\Leftrightarrow$ X P(X) - $\frac{X^2-1}{2n} P^1(X) = 0$

$\Leftrightarrow$ P = $\lambda.(X^2-1)^n$ , $\lambda \in \Re$ ( car P solution d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre)

Ker T $\neq$ { 0 } donc T non injectif.

T endomorphisme d'un $\Re$ espace vectoriel de dimension finie , T non injectif donc non surjectif.

**1.c**

$T(X^p) = X^{p+1} - \frac{p}{2n} X^{p+1} + \frac{p}{2n} X^{p-1}$ , $\forall p \in [1,2n]$ avec p entier

$T(1) = X$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2n} & & & & & 0 \\ 1 & \backslash & \backslash & & & 0 & \\ & \backslash & \backslash & \frac{p}{2n} & & & \\ & & \backslash & 0 & \backslash & & \\ & & & \frac{2n-p}{2n} & \backslash & \frac{2n-1}{2n} & \\ & 0 & & & \backslash & \backslash & 1 \\ 0 & & & & & \frac{1}{2n} & 0 \end{pmatrix}$$

**2.**

$T(P_0) = X(X+1)^{2n} - \frac{X^2-1}{2n}.2n(X+1)^{2n-1} = (X+1)^{2n}$

$T(P_{2n}) = X(X-1)^{2n} - \frac{X^2-1}{2n}.2n(X-1)^{2n-1} = -(X-1)^{2n}$

$\forall k \in [1,2n-1], T(P_k) = \frac{n-k}{n}.P_k$ avec p entier

remarque :

Pour k = n , on retrouve $T(P_n) = 0$ , $P_n = (X^2-1)^n$

On en déduit que T est diagonalisable puisque admet 2n + 1 valeurs propres distinctes et dim $\Re_{2n}[X] = 2n+1$ . $(P_0,\dots\dots,P_{2n})$ base de vecteurs propres.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \frac{n-1}{n} & & & 0 & & \\ & & \frac{n-k}{n} & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & -\frac{n-k}{n} & & \\ & 0 & & & & -\frac{n-1}{n} & \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

U matrice de passage de $(1, X, \dots, X^{2n})$ à $(P_0, P_1, \dots, P_{2n})$

donc $B = U^{-1}AU$

$U = (u_{ij})_{\substack{0 \le i \le 2n \\ 0 \le j \le 2n}}$

$$P_{2n} = \sum_{i=0}^{2n} u_{i0} X^i = (X-1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i (-1)^{2n-i} X^i = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i C_{2n}^i X^i$$

$$P_0 = \sum_{i=0}^{2n} u_{i2n} X^i = (X+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i X^i$$

$$\forall k \in [1, 2n-1], P_k = (X-1)^k (X+1)^{2n-k} = X^{2n} + \dots\dots + (-1)^k$$

Ainsi

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & (-1)^j & & 1 \\ -C_{2n}^1 & & & & C_{2n}^1 \\ (-1)^i C_{2n}^i & & * & & C_{2n}^i \\ & & & & \\ 1 & 1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k P_k(X) = \sum_{k=0}^{2n} (X-1)^k (X+1)^{2n-k} = (X-1+X+1)^{2n} = 2^{2n} X^{2n}$$

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k P_k(X) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (X-1)^k (X+1)^{2n-k} = (X+1-(X-1))^{2n} = 2^{2n}$$

$X^j = \sum_{k=0}^{2n} v_{kj} P_k(X)$ Pour X = 1 on obtient $1 = v_{0j}.2^{2n}$

Pour X = -1 on obtient $(-1)^j = v_{2nj}.2^{2n}$

$$V = U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{2n}} & \frac{1}{2^{2n}} & \frac{1}{2^{2n}} \\ \frac{(-1)^i C_{2n}^i}{2^{2n}} & * & \frac{C_{2n}^i}{2^{2n}} \\ \frac{1}{2^{2n}} & \frac{(-1)^j}{2^{2n}} & \frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix}$$

B matrice diagonale $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $B^{2k}$ et $B^{2k+1}$ matrices diagonales.

$B = (b_{ij})_{\substack{0 \le i \le 2n \\ 0 \le j \le 2n}}$ si $i \neq j$ , $b_{ij} = 0$

pour tout i de [0,2n] avec i entier , $b_{ii} = \frac{n-i}{n}$

On en déduit : pour tout entier k , $B^{2k}$ matrice diagonale de termes diagonaux $\left(\frac{n-i}{n}\right)^{2k}$ .

$\forall i \in [1, 2n-1]$ avec i entier , $\left(\frac{n-i}{n}\right)^{2k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

Pour $i = 0$ ou $i = 2n$ , $\left(\frac{n-i}{n}\right)^{2k} = 1$

<u>conclusion :</u> $$\lim_{k \to +\infty} B^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = L_0$$

de même $$\lim_{k \to +\infty} B^{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} = L_1$$

$A^{2k} = UB^{2k}U^{-1}$ donc $A^{2k} \to UL_0U^{-1}$

En effet , on peut choisir sur $M_{2n+1}(\Re)$ , une norme || || telle que $\|AB\| \le \|A\|.\|B\|$ ; on en déduit :

$\|UB^{2k}U^{-1} - UL_0U^{-1}\| \le \|U\|.\|B^{2k} - L_0\|.\|U^{-1}\|$

ce qui prouve $\|UB^{2k}U^{-1} - UL_0U^{-1}\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ donc $A^{2k} \to UL_0U^{-1}$

de même $A^{2k+1} \to UL_1U^{-1}$

**Détermination de $UL_0U^{-1}$ :**

La matrice représentative de l'endomorphisme f de $\Re_{2n}[X]$ dans la base $(P_0,\ldots\ldots,P_{2n})$ tel que :

$f(P_0)=P_0$ , $f(P_{2n})=P_{2n}$

$f(P_k)=0 \qquad \forall k\in[1,2n-1]$

donc $UL_0U^{-1}$ matrice représentative de f dans la base canonique $(1,X,\ldots\ldots X^{2n})$.

$$f(1)=f(\sum_{i=0}^{2n}v_{i0}P_i)=\sum_{i=0}^{2n}v_{i0}f(P_i)=v_{00}P_0+v_{2n0}P_{2n}=\frac{P_0+P_{2n}}{2^{2n}}$$

De même

$$f(X^j)=f(\sum_{i=0}^{2n}v_{ij}P_i)=\sum_{i=0}^{2n}v_{ij}f(P_i)=v_{0j}P_0+v_{2nj}P_{2n}=\frac{P_0+(-1)^jP_{2n}}{2^{2n}}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=0}^{2n}C_{2n}^i(1+(-1)^{i+j})X^i$$

$$\boxed{UL_0U^{-1}=\left(\frac{C_{2n}^i(1+(-1)^{i+j})}{2^{2n}}\right)_{\substack{0\le i\le 2n\\0\le j\le 2n}}}$$

**Détermination de $UL_1U^{-1}$ :**

Dans ce cas $f(P_0)=P_0$ , $f(P_{2n})=-P_{2n}$ et $f(P_k)=0$

$$f(X^j)=\frac{P_0+(-1)^{j+1}P_{2n}}{2^{2n}}$$

$$\boxed{UL_1U^{-1}=\left(\frac{C_{2n}^i(1+(-1)^{i+j+1})}{2^{2n}}\right)_{\substack{0\le i\le 2n\\0\le j\le 2n}}}$$

## **<u>Problème 2 : Analyse</u>**

$$f(x,y,z)=F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

**<u>1.</u>**

$$\frac{\partial. f}{\partial. x}(x,y,z)=F'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial.^2 f}{\partial. x^2}(x,y,z)=F''\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}+F'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$ On en déduit :

$$x\frac{\partial. f}{\partial. x}+y\frac{\partial. f}{\partial. y}+z\frac{\partial. f}{\partial. z}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.F'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$\frac{\partial.^2 f}{\partial. x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial. y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial. z^2}=F''\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.F'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Conclusion :

f est solution de $\frac{\partial.^2 f}{\partial. x^2}+\frac{\partial.^2 f}{\partial. y^2}+\frac{\partial.^2 f}{\partial. z^2}-x\frac{\partial. f}{\partial. x}-y\frac{\partial. f}{\partial. y}-z\frac{\partial. f}{\partial. z}=\lambda. f$

sur $\Re^3-\{(0,0,0)\}$ si et seulement si F est solution sur $]0,+\infty[$ de (E) :

$$F''(r)+\frac{2}{r}F'(r)-rF'(r)=\lambda.F(r)$$

ou $rF''(r)+(2-r^2)F'(r)-\lambda.rF(r)=0$ $\qquad \lambda=3$

**2.a0**

Solutions développables en séries entières

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k$ solution de (E) $\Leftrightarrow r\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k r^{k-2}+(2-r^2)\sum_{k=1}^{+\infty} ka_k r^{k-1}-\lambda\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^{k+1}=0$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)ka_{k+1}r^k+2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}r^k-\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)a_{k-1}r^k-\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda.a_{k-1}r^k=0$$

Coefficient constant : $2a_1=0$

Coefficient de r : $6a_2-\lambda.a_0=0$

Coefficient de $r^k\,(k\geq 2)$ : $(k+1)ka_{k+1}+2(k+1)a_{k+1}-[(k-1)+\lambda]a_{k-1}=0$

$$(k+2)(k+1)a_{k+1}-[(k-1)+\lambda]a_{k-1}=0$$

ce qui s'écrit aussi pour $k\geq 1$ :

$$(k+3)(k+2)a_{k+2}-(k+\lambda)a_k=0$$

et on vérifie que pour k=0 , on retrouve $6a_2-\lambda.a_0=0$

**2.b**

Rayon de convergence :

$$\frac{a_{2k+2}r^{2k+2}}{a_{2k}r^{2k}}=\frac{(2k+\lambda)}{(2k+3)(2k+2)}r^2\xrightarrow[k\to+\infty]{}0 \qquad \forall r>0$$

donc le rayon de convergence est égal à $+\infty$

**2.c**

$\underline{\lambda=3}$

$$a_{2k}=\frac{1}{2k}a_{2k-2}=\frac{1}{2k.(2k-2).......2}a_0=\frac{a_0}{2^k.k!} \qquad \text{avec } a_0=1$$

$$S(r)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_{2k}r^{2k}=a_0\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^{2k}}{2^k.k!}=a_0e^{\frac{r^2}{2}}$$

**3.a**

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=0$$

donc pour x assez grand $e^{-\frac{x^2}{2}}\leq\frac{1}{x^2}$

et $x\to e^{-\frac{x^2}{2}}$ intégrable sur $[r,+\infty[,\forall r>0$

$$\int_r^X e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}\right]_r^X-\int_r^X\frac{1}{x}.x.e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= -\frac{e^{-\frac{X^2}{2}}}{X} + \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{r} - \int_r^X e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

puis par passage à la limite : $X \to +\infty$

$$\boxed{\int_r^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{x^2} = \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{r} - \Pi(r)}$$

**3.b**

F=Sy
F'=S'y+Sy'
F''=S''y+2S'y'+Sy''
F est solution de (E) $\Leftrightarrow [rS'' + (2-r^2)S' - \lambda.rS]y + [2rS' + (2-r^2)S]y' + rSy'' = 0$
or $\Leftrightarrow [rS'' + (2-r^2)S' - \lambda.rS]y = 0$
donc F solution de (E) $\Leftrightarrow rSy'' + [2rS' + (2-r^2)S]y' = 0$

$S(r) = e^{-\frac{r^2}{2}}$ $S'(r) = re^{\frac{r^2}{2}}$
donc $2rS' = 2r^2S$

F solution de (E) $\Leftrightarrow S(ry'' + (r^2+2)y') = 0$
F=Sy $\Leftrightarrow ry'' + (r^2+2)y' = 0$

$$\Leftrightarrow y'(r) = A\frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{r^2} \qquad (A \in \Re)$$

$$\Leftrightarrow y(r) = A(M(r) - \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{r^2}) + B \qquad (A,B) \in \Re^2$$

**3.c**

Les solutions de E sur $]0,+\infty[$ :

$$\boxed{F(r) = A(\Pi(r) - \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{r}).e^{\frac{r^2}{2}} + Be^{\frac{r^2}{2}}} \qquad (A,B) \in \Re^2$$