

EPREUVE COMMUNE de MATHEMATIQUES

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants.

PROBLEME 1: algèbre linéaire.

Etant donné un nombre entier $n \geq 1$, on désigne par $\mathbf{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à $2n$.

A tout polynôme P de $\mathbf{R}_{2n}[X]$, on associe le polynôme Q défini par:

$$Q(X) = XP(X) - \frac{X^2 - 1}{2n} P'(X).$$

1°) Etude d'un endomorphisme.

- Prouver que l'application T associant au polynôme P le polynôme Q constitue un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_{2n}[X]$.
- Déterminer le(s) polynôme(s) P de $\mathbf{R}_{2n}[X]$ appartenant au noyau de T .
L'endomorphisme T est-il injectif? surjectif?
- Ecrire la matrice A de T dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^{2n})$ de $\mathbf{R}_{2n}[X]$.

2°) Etude des éléments propres de l'endomorphisme T .

- Déterminer l'image par T du polynôme $P_k(X) = (X-1)^k(X+1)^{2n-k}$ où $0 \leq k \leq 2n$.
En déduire les valeurs propres de T et montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_{2n})$ forme une base de $\mathbf{R}_{2n}[X]$.

On note U la matrice de passage de la base canonique à la base $(P_0, P_1, \dots, P_{2n})$.

- Déterminer la matrice $B = U^{-1}AU$.
- Expliciter la première et la dernière lignes et la première et la dernière colonnes de la matrice U .

3°) Etude de la matrice-inverse de U .

- Déterminer les composantes du polynôme X^{2n} dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_{2n})$ en calculant la somme $\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k P_k(X)$.
- Déterminer les composantes du polynôme 1 dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_{2n})$ en calculant la somme $\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k P_k(X)$.
- On note $X^j = v_{0,j}P_0 + v_{1,j}P_1 + \dots + v_{2n,j}P_{2n}$ pour $0 \leq j \leq 2n$. Calculer $v_{0,j}$ et $v_{2n,j}$.
- Expliciter la première et la dernière lignes et la première et la dernière colonnes de la matrice $V = U^{-1}$.

4°) Etude des limites des puissances de la matrice A .

- Expliciter les limites des deux suites matricielles (B^{2k}) et (B^{2k+1}) lorsque k tend vers $+\infty$.
- Expliciter les limites des deux suites matricielles (A^{2k}) et (A^{2k+1}) lorsque k tend vers $+\infty$.

PROBLEME 2: analyse.

On considère une fonction f de trois variables réelles x, y, z , définie de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} . On suppose de plus que cette fonction f ne dépend que de la distance à l'origine, autrement dit qu'il existe une fonction $F: [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ telle que:

$$f(x, y, z) = F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

On suppose cette fonction F de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, de sorte que f est de classe C^2 sur l'espace \mathbf{R}^3 privé du point O , et l'on se propose d'étudier ici sur l'espace \mathbf{R}^3 privé du point O les solutions de l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} - z \frac{\partial f}{\partial z} - 3f = 0.$$

1°) Expression de l'équation différentielle vérifiée par F .

a) Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ de f en fonction des variables x, y, z et de $F'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ et $F''(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

b) Prouver que f est solution de l'équation aux dérivées partielles précédente sur l'espace \mathbf{R}^3 privé du point O si et seulement si F est solution de l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$:

$$(E): \quad rF''(r) + (2 - r^2)F'(r) - 3rF(r) = 0.$$

2°) Etude des solutions développables en série entière de (E).

a) On considère une suite de nombres réels (a_k) .

Montrer que la fonction $r \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k$ est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $a_1 = 0$ et

$(k+2)a_{k+2} = a_k$ pour tout nombre entier naturel k .

b) On considère réciproquement une suite de nombres réels (a_k) vérifiant la relation précédente et l'on forme la série entière $F(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} r^{2k}$.

Déterminer le rayon de convergence de cette série entière, et en déduire que F est bien solution de l'équation différentielle (E) sur \mathbf{R} .

c) Déterminer le coefficient a_{2k} en fonction de $a_0, k!$ et 2^k .

Exprimer, lorsque $a_0 = 1$, la somme $S(r)$ de la série entière $\sum a_{2k} r^{2k}$ à l'aide des fonctions usuelles.

3°) Etude de l'ensemble des solutions de (E).

a) On considère la fonction définie pour $r > 0$ par:

$$\Pi(r) = \int_r^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Justifier l'intégrabilité de la fonction $x \rightarrow \exp(-x^2/2)$ sur tout intervalle $[r, +\infty[$ où $r > 0$. Par une intégration par parties, exprimer $\int_r^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{dx}{x^2}$ en fonction de r et $\Pi(r)$.

b) On pose alors dans l'équation différentielle (E): $F(r) = S(r)y(r)$.

Montrer que F est solution de (E) si et seulement si $ry''(r) + (r^2 + 2)y'(r) = 0$, puis exprimer les solutions de cette équation à l'aide de la fonction Π .

c) En déduire l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation (E).

Quelles solutions de l'équation aux dérivées partielles de départ en déduit-on?