CONCOURS D'ENTRÉE CYCLE INGENIEUR

OPTION : MATHEMATIQUES

Samedi 16 Avril 2016

Durée : 2 Heures

Epreuve optionnelle de mathématiques (2h)

Dans ce problème, on considère une suite de jets indépendants d'une même pièce, pouvant donner Face avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et Pile avec la probabilité $q = 1 - p$.
Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements :
- F_n : "le $n^{\text{ème}}$ jet de la pièce a donné Face".
- P_n : "le $n^{\text{ème}}$ jet de la pièce a donné Pile".

Dans la partie I, on s'intéresse au numéro du jet de la pièce où, pour la première fois, on a deux Faces consécutifs, et plus généralement, on étudie dans la partie II le numéro du jet de la pièce où, pour la première fois, on obtient r Faces consécutifs avec $r \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE I : Première obtention de deux Faces consécutifs

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'événement suivant E_n, dont notera la probabilité p_n :
E_n : "une suite de 2 Faces consécutifs est obtenue pour la $1^{\text{ère}}$ fois à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jet".
Par exemple, si les résultats des jets 1, 2, 3, 4, 5 ... sont "Face, Pile, Face, Face, Face, ... ", l'événement E_4 est réalisé puisque c'est au $4^{\text{ème}}$ jet de la pièce qu'on obtient deux Faces consécutifs pour la première fois depuis le début du jeu.

1°) *Relations entre les probabilités p_n*
a) Expliciter les événements E_1, E_2, E_3 et calculer leurs probabilités p_1, p_2, p_3.
b) Justifier l'égalité : $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.
c) Justifier l'égalité : $E_{n+3} = F_{n+3} \cap F_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \overline{E_n} \cap \overline{E_{n-1}} \cap \ldots \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_1}$.
d) En déduire la relation suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right).$$

e) A l'aide de la relation précédente, établir enfin la formule suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_{n+3} = p_{n+2} - p^2 q \, p_n.$$

2°) *Expression des probabilités p_n*
On considère dans cette question le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + p^2 q$.
a) Vérifier que p est racine de P, et que P admet deux autres racines réelles r_1 et r_2.
Préciser $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$ et donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
b) On note T l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ associant à toute suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{S}$ la suite $(u_{n+1})_{n\geq 1}$ de $\mathcal{S}$, et Id l'endomorphisme-identité de $\mathcal{S}$.
- Déterminer pour tout réel λ les suites de $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id})$.
- Déterminer à l'aide du théorème des noyaux les suites de $\operatorname{Ker}\left(T^3 - T^2 + p^2 q \operatorname{Id}\right)$.
- En déduire les suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+3} = u_{n+2} - p^2 q \, u_n$.

c) Démontrer l'égalité suivante pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, puis pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = p^2 \frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2}.$$

d) Préciser r_1, r_2 et l'expression de p_n lorsque la pièce est équilibrée ($p = q = \frac{1}{2}$).

3°) *Temps d'attente moyen de la première suite de deux Faces consécutifs*

a) A l'aide des résultats précédents, calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$.

On définit alors une variable aléatoire X_2 en convenant de poser pour tout entier $n \geq 1$ $X_2 = n$ lorsque l'événement E_n est réalisé, c'est à dire quand le premier double Face est réalisé à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jet de la pièce, et on a donc : $\mathbb{P}(X_2 = n) = p_n$.

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X_2)$ en fonction du seul réel p (on ne fera apparaître ni r_1 ni r_2 dans le résultat final).

c) Préciser numériquement $\mathbb{E}(X_2)$ lorsque la pièce est équilibrée ($p = q = \frac{1}{2}$).

PARTIE II : Première obtention de *r* Faces consécutifs ($r \in \mathbb{N}^*$)

Dans cette partie, on reprend et généralise les notations de la partie I de la façon suivante.
Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'événement suivant E_n, dont notera la probabilité p_n :

E_n : "une suite de r Faces consécutifs est obtenue pour la 1ère fois à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jet".

On conviendra par ailleurs de poser $p_0 = 0$, de sorte que la suite (p_n) est définie pour $n \in \mathbb{N}$.

4°) *Fonction génératrice de la suite* (p_n)

a) Etablir que la série $\sum p_n$ est convergente, et que sa somme est inférieure ou égale à 1.

b) En déduire que la fonction suivante est définie pour tout réel x vérifiant $|x| \leq 1$:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, x^n.$$

c) Démontrer que la fonction G est continue sur le segment $[-1,\ 1]$.

5°) *Temps d'attente moyen de la première suite de r Faces consécutifs*

a) En reprenant le raisonnement effectué dans la question 1° dans le cas $r = 2$, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+r+1} = p^r\, q\left(1 - \sum_{k=0}^{n} p_k\right).$$

b) Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right) x^n$ en fonction de x et $G(x)$ pour $|x| < 1$.

c) En multipliant la relation 5.a) par x^{n+r+1} et en sommant, démontrer qu'on a pour $|x| < 1$:

$$G(x) = \frac{p^r\, x^r (1 - p\, x)}{1 - x + p^r\, q\, x^{r+1}}.$$

d) En faisant tendre x vers 1, en déduire la somme $G(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n$.

On définit alors une variable aléatoire X_r en convenant de poser pour tout entier $n \geq 1$ $X_r = n$ lorsque l'événement E_n est réalisé, c'est à dire quand la première suite de r Faces consécutifs est réalisée à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jet de la pièce, et on a donc : $\mathbb{P}(X_r = n) = p_n$.

Déterminer $G'(1)$ et en déduire l'espérance $\mathbb{E}(X_r)$ en fonction de p et r.

Retrouver le résultat de la partie I lorsque $r = 2$.

e) Préciser $\mathbb{E}(X_r)$ en fonction de r lorsque la pièce est équilibrée ($p = q = \frac{1}{2}$).