EPITA
ÉCOLE D'INGÉNIEURS EN INFORMATIQUE

IPSA
ÉCOLE D'INGÉNIEURS DE L'AIR ET DE L'ESPACE

CONCOURS D'ENTRÉE CYCLE INGENIEUR

OPTION : MATHEMATIQUES

Samedi 16 Avril 2016

Durée : 2 Heures

E.P.I.T.A. 2016

Corrigé de l'épreuve optionnelle de mathématiques (2h)

PARTIE I : Première obtention de deux Faces consécutifs

1°) *Relations entre les probabilités* p_n

a) L'événement E_1 est évidemment impossible et on a $p_1 = 0$.
On a ensuite $E_2 = F_1 \cap F_2$ et par indépendance de F_1 et F_2, on a $p_2 = p^2$.
On a enfin $E_3 = P_1 \cap F_2 \cap F_3$ et par indépendance, on a $p_3 = q\, p^2$.

b) Les événements $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont deux à deux incompatibles (si le premier double Face est obtenu à l'issue du $j^{\text{ème}}$ jet du dé, il n'est pas obtenu à l'issue d'un autre jet).
On en déduit par incompatibilité que : $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

c) Si l'événement E_{n+3} est réalisé, on a nécessairement :
- Face au $(n+3)^{\text{ème}}$ et au $(n+2)^{\text{ème}}$ jets,
- Pile au $(n+1)^{\text{ème}}$ jet,
- les événements $\overline{E_n}, \dots, \overline{E_2}, \overline{E_1}$ sont réalisés (par incompatibilité de E_{n+3} et E_j où $j \le n$).

Réciproquement, si tous ces événements sont réalisés, alors E_{n+3} est réalisé, de sorte que :
$$E_{n+3} = F_{n+3} \cap F_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \overline{E_n} \cap \overline{E_{n-1}} \cap \dots \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_1}.$$

d) Par indépendance de $F_{n+3}, F_{n+2}, P_{n+1}, \overline{E_n} \cap \overline{E_{n-1}} \cap \dots \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_1}$, il vient :
$$\mathbb{P}(E_{n+3}) = p^2 q\ \mathbb{P}\left(\overline{E_n} \cap \overline{E_{n-1}} \cap \dots \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_1}\right).$$
Puis en passant à l'événement contraire :
$$\mathbb{P}(E_{n+3}) = p^2 q\ (1 - \mathbb{P}(E_n \cup E_{n-1} \cup \dots \cup E_2 \cup E_1)).$$
Enfin, en exploitant l'incompatibilité de $E_1, \dots, E_n$:
$$\mathbb{P}(E_{n+3}) = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\right) \qquad \text{ou} \qquad p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right).$$

e) En formant $\mathbb{P}(E_{n+3}) - \mathbb{P}(E_{n+2}) = p_{n+3} - p_{n+2}$, il vient finalement :
$$p_{n+3} - p_{n+2} = p^2 q \left(\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right) - \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\right)\right) = -p^2 q\, p_n.$$

2°) *Expression des probabilités* p_n

a) Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + p^2 q$ admet clairement p pour racine car $1 - p = q$, et :
$$P(X) = (X - p)\left(X^2 - q X - p q\right).$$
Ce trinôme du second degré a deux racines réelles r_1 et r_2 car $\Delta = q^2 + 4 p q > 0$.
Et la somme de ces deux racines r_1, r_2 est q, et leur produit est $-pq$.

b) Si T est l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites réelles $(u_n)_{n\ge1}$ associant à toute suite (u_n) de $\mathcal{S}$ la suite (u_{n+1}) de $\mathcal{S}$, on a :
$$\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}) = \left\{(u_n)_{n\ge1} \middle/ T(u_n) = \lambda(u_n) \ \text{ ou } \ (u_{n+1}) = \lambda(u_n)\right\}.$$

Il est clair que $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{Id})$ est l'ensemble des suites géométriques de raison λ, c'est à dire des suites de la forme $n \longrightarrow A\,\lambda^n$ où A désigne une constante quelconque.

Comme $P(X) = (X - p)\,(X - r_1)\,(X - r_2)$ où les polynômes $X - p$, $X - r_1$, $X - r_2$ sont deux à deux premiers entre eux puisque les réels p, r_1, r_2 sont deux à deux distincts, le théorème des noyaux donne :

$$\mathrm{Ker}\big(T^3 - T^2 + p^2\,q\,\mathrm{Id}\big) = \mathrm{Ker}(T - p\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(T - r_1\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(T - r_2\,\mathrm{Id}).$$

Comme $\mathrm{Ker}\big(T^3 - T^2 + p^2\,q\,\mathrm{Id}\big) = \big\{(u_n)_{n\geq 1} \,/\, (u_{n+3}) - (u_{n+2}) + p^2\,q\,(u_n) = (0)\big\}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+3} - u_{n+2} + p^2\,q\,u_n = 0$, on voit que ces suites sont celles de la forme $n \longrightarrow A\,p^n + B\,r_1^n + C\,r_2^n$ avec des constantes A, B, C quelconques.

c) D'après la question 1°, la suite $n \longrightarrow p_n$ appartient à $\mathrm{Ker}\big(T^3 - T^2 + p^2\,q\,\mathrm{Id}\big)$, donc :

$$\exists\, A, B, C \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = A\,p^n + B\,r_1^n + C\,r_2^n.$$

La suite $n \longrightarrow q_n$ définie ci-dessous appartient aussi à $\mathrm{Ker}\big(T^3 - T^2 + p^2\,q\,\mathrm{Id}\big)$ car :

$$q_n = p^2\,\frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2} = 0\,p^n + \frac{p^2\,r_1^{-1}}{r_1 - r_2}\,r_1^n + \frac{p^2\,r_2^{-1}}{r_2 - r_1}\,r_2^n.$$

De plus, on a $p_1 = q_1 = 0$, $p_2 = q_2 = p^2$, $p_3 = q_3 = p^2\,q$.

La relation vérifiée par ces suites donne alors par récurrence évidente $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = q_n$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad p_n = p^2\,\frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2}.$$

d) Si $p = q = \frac{1}{2}$, on a $P(X) = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X^2 - \frac{1}{2}\,X - \frac{1}{4}\right) = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$.

L'expression de p_n est alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad p_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right).$$

3°) *Temps d'attente moyen de la première suite de deux Faces consécutifs*

a) D'après l'expression obtenue de p_n, et compte tenu de $r_1 + r_2 = q$ et $r_1\,r_2 = -pq$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \frac{p^2}{r_1 - r_2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} r_1^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} r_2^{n-1}\right) = \frac{p^2}{r_1 - r_2}\left(\frac{1}{1 - r_1} - \frac{1}{1 - r_2}\right) = \frac{p^2}{(1 - r_1)\,(1 - r_2)} = 1.$$

b) L'espérance $\mathbb{E}(X_2)$, si elle existe, est la somme de la série suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X_2 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,p_n = \frac{p^2}{r_1 - r_2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\,r_1^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\,r_2^{n-1}\right).$$

On reconnaît ici des séries géométriques dérivées, dont la somme est bien connue :

$$\mathbb{E}(X_2) = \frac{p^2}{r_1 - r_2}\left(\frac{1}{(1 - r_1)^2} - \frac{1}{(1 - r_2)^2}\right) = \frac{p^2(2 + r_1 + r_2)}{(1 - r_1)^2\,(1 - r_2)^2} = \frac{2 - q}{p^2} = \frac{1 + p}{p^2}.$$

c) En particulier, si $p = q = \frac{1}{2}$, on obtient : $\mathbb{E}(X_2) = 6$.

PARTIE II : Première obtention de r Faces consécutifs ($r \in \mathbb{N}^*$)

4°) *Fonction génératrice de la suite* (p_n)

a) Comme dans la partie I, les événements E_n sont deux à deux incompatibles.
En considérant la probabilité de l'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, qui est inférieure à 1, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \leq 1.$$

b) Pour tout $|x| \leq 1$, on a donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|p_n\, x^n| \leq p_n$, et $\sum p_n$ converge.
La série définissant $G(x)$ est ainsi absolument convergente, donc convergente pour $|x| \leq 1$.

c) On applique sur $[-1, 1]$ le théorème de continuité des séries de fonctions :
- le terme général $x \longrightarrow p_n\, x^n$ est continu sur $[-1, 1]$.
- la série définissant G est normalement, donc uniformément convergente sur $[-1, 1]$ car :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, |x| \leq 1,\ |p_n\, x^n| \leq p_n \qquad \text{et} \qquad \sum p_n \text{ converge.}$$

Ainsi, la fonction génératrice G est continue sur le segment $[-1, 1]$.

5°) *Temps d'attente moyen de la première suite de r Faces consécutifs*

a) Le raisonnement effectué dans la question 1° dans le cas $r = 2$ donne de même :

$$E_{n+r+1} = F_{n+r+1} \cap F_{n+r} \cap \ \dots\ \cap F_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \overline{E_n} \cap \overline{E_{n-1}} \cap \ \dots\ \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_1}.$$

Par des arguments d'indépendance, il vient :

$$\mathbb{P}(E_{n+r+1}) = p^r\, q\ \mathbb{P}\left(\overline{E_n} \cap \overline{E_{n-1}} \cap \ \dots\ \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_1}\right).$$

Puis en passant à l'événement contraire :

$$\mathbb{P}(E_{n+r+1}) = p^r\, q\ (1 - \mathbb{P}(E_n \cup E_{n-1} \cup \ \dots\ \cup E_2 \cup E_1)).$$

Enfin, en exploitant l'incompatibilité de $E_1, \ \dots, E_n$, on a pour $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(E_{n+r+1}) = p^r\, q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\right) \qquad \text{ou} \qquad p_{n+r+1} = p^r\, q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right).$$

Ajoutons que cette relation reste valable pour $n = 0$ puisque la somme $\sum_{k=1}^{0}$ est nulle.

b) Pour $|x| < 1$, on a par produit des séries absolument convergentes $\sum p_n\, x^n$ et $\sum x^n$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \frac{G(x)}{1-x}.$$

c) En multipliant la relation 5.a) par x^{n+r+1} et en sommant, on a donc pour $|x| < 1$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+r+1}\, x^{n+r+1} = p^r\, q\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right) x^{n+r+1}\right).$$

Et compte tenu du résultat obtenu en (b), et des relations $p_0 = \ \dots\ = p_{r-1} = 0$ et $p_r = p^r$:

$$G(x) - p^r\, x^r = p^r\, q\, x^{r+1}\, \frac{1}{1-x} - p^r\, q\, x^{r+1}\, \frac{G(x)}{1-x}.$$

Et quitte à réorganiser la relation, on obtient pour $|x| < 1$:

$$G(x) = \frac{p^r\, x^r (1 - p\, x)}{1 - x + p^r\, q\, x^{r+1}}.$$

d) Les deux membres de cette égalité sont continus sur $]-1,\ 1[$, et aussi sur $[-1,\ 1]$ car :
- on l'a établi à la question 4° pour la fonction G.
- c'est évident pour le second membre puisque c'est un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas en ± 1.

En faisant tendre x vers 1, on obtient comme attendu $G(1) = 1$.
Et on obtient par dérivation de l'égalité précédente pour $x = 1$ (ce qui simplifie le calcul!) :

$$G'(1) = \frac{1 - p^r}{p^r\, q}.$$

D'après un résultat de cours, comme G n'est autre que la fonction génératrice de X_r, l'existence de $G'(1)$ implique celle de $\mathbb{E}(X_r)$ et donne :

$$\mathbb{E}(X_r) = \frac{1 - p^r}{p^r\, q}.$$

Pour $r = 1$, on retrouve l'espérance de la loi géométrique : $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{p}$.

Pour $r = 2$, on retrouve l'espérance de la loi obtenue en I : $\mathbb{E}(X_2) = \frac{1-p^2}{p^2\, q} = \frac{1+p}{p^2}$.

e) Dans le cas d'une pièce équilibrée, on obtient en particulier :

$$\mathbb{E}(X_r) = \frac{1 - 2^{-r}}{2^{-r-1}} = 2^{r+1} - 2.$$

Pour $r = 2$, on retrouve l'espérance $\mathbb{E}(X_2) = 6$ obtenue à l'issue de la partie I.