CONCOURS D'ENTRÉE CYCLE INGENIEUR

EPREUVE : MATHEMATIQUES

Samedi 16 Avril 2016

Durée : 3 Heures

E.P.I.T.A. 2016

Corrigé de l'épreuve de mathématiques (3 h)

1°) *Etude d'une fonction auxiliaire f*

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(u) = \frac{1-\cos(u)}{u^2}$.

a) La fonction f est clairement continue sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est positive de manière évidente, et comme $|1-\cos(u)| \leq 1 + |\cos(u)| \leq 2$, on a donc $0 \leq f(u) \leq 2/u^2$ pour $u > 0$.

b) Au voisinage de 0, on sait que $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, d'où résulte que :

$$\lim_{u\to 0} f(u) = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{u^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\frac{u^2}{2} + o(u^2)}{u^2} = \lim_{u\to 0} \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}.$$

On pourra donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

c) La fonction f est alors continue sur $[0, +\infty[$, positive, et majorée par $2/u^2$ sur $[1, +\infty[$. Il en résulte qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que l'intégrale $L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,du$ converge.

d) L'intégrale $L(x)$ est également convergente pour tout réel positif x car c'est l'intégrale d'une fonction continue (ou prolongeable par continuité) sur $\mathbb{R}_+$, positive et majorée par f, fonction dont on vient d'établir l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall\, u > 0, \quad 0 \leq \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,e^{-xu} \leq \frac{1-\cos(u)}{u^2} = f(u).$$

2°) *Propriétés de la fonction L*

a) On applique à L le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre :

1) pour tout $u \geq 0$, la fonction $x \longrightarrow f(u)\,e^{-xu}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) la fonction intégrée $u \longrightarrow f(u)\,e^{-xu}$ est dominée indépendamment du paramètre $x \geq 0$ par la fonction f, dont on a établi l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall\, u \geq 0, \quad |f(u)\,e^{-xu})| = f(u)\,e^{-xu} \leq f(u).$$

Il en résulte que la fonction $x \longrightarrow L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,e^{-xu}\,du$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Selon la formule $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$, on a : $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

On a donc $1 - \cos(u) = 2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \leq \frac{u^2}{2}$ d'après l'inégalité classique $|\sin(x)| \leq |x|$, d'où :

$$\forall\, u > 0, \quad 0 \leq f(u) = \frac{1-\cos(u)}{u^2} = \frac{2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}{u^2} \leq \frac{2}{u^2}\,\frac{u^2}{4} = \frac{1}{2}.$$

L'inégalité reste évidemment valable pour $u = 0$ puisque $f(0) = \frac{1}{2}$.

Notons qu'on pourrait également prouver cette égalité en étudiant $u \longrightarrow \frac{u^2}{2} - 1 + \cos(u)$, puis en vérifiant que cette fonction est positive sur $\mathbb{R}_+$. Par intégration, on en déduit que :

$$\forall\, x \geq 0, \quad 0 \leq L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\, e^{-x\,u}\, \mathrm{d}u \;\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\, e^{-x\,u}\, \mathrm{d}u \;=\; \frac{1}{2\,x}.$$

Par encadrement, il en résulte que la limite de $L(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est 0.

c) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, compte tenu de $0 \leq f \leq \frac{1}{2}$, on a pour tout $x \geq \varepsilon$ et tout $u > 0$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\,(f(u)\, e^{-x\,u})\right| = u\, f(u)\, e^{-x\,u} \leq \frac{1}{2}\, u\, e^{-\varepsilon\, u}\,, \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(f(u)\, e^{-x\,u})\right| = u^2\, f(u)\, e^{-x\,u} \leq \frac{1}{2}\, u^2\, e^{-\varepsilon\, u}.$$

On applique à L le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre :

1) la fonction $(x, u) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\,(f(u)\, e^{-x\,u})$ est continue en chacune de ses variables x et u.

2) la fonction $u \longrightarrow f(u)\, e^{-x\,u}$ est dominée indépendamment du paramètre $x \geq \varepsilon > 0$ par la fonction intégrable $u \longrightarrow \frac{1}{2}\, u\, e^{-\varepsilon\, u}$,qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue et négligeable devant $\frac{1}{u^2}$ au voisinage de $+\infty$.

On en déduit que L est de classe C^1 sur tout intervalle $[\varepsilon, +\infty[$, donc sur $]\,0, +\infty[$ puisque tout réel x strictement positif appartient à un intervalle $[\varepsilon, +\infty[$ avec $0 < \varepsilon < x$, et on a :

$$L'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-\cos(u)}{u^2}\, e^{-x\,u}\right) \mathrm{d}u = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u}\, e^{-x\,u}\, \mathrm{d}u.$$

En appliquant le même raisonnement à la fonction L', on obtient que L est C^2 sur $]0, +\infty[$:

$$L''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1-\cos(u)}{u^2}\, e^{-x\,u}\right) \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} (1-\cos(u))\, e^{-x\,u}\, \mathrm{d}u.$$

3°) *Expression de L(x) sans symbole intégral*

a) L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)\,u}\, \mathrm{d}u$ est absolument convergente puisque $\left|e^{(-x+i)\,u}\right| = e^{-x\,u}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on a (compte tenu de $\lim_{A \to +\infty} \left|e^{-(x-i)\,A}\right| = \lim_{A \to +\infty} e^{-x\,A} = 0$) :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)\,u}\, \mathrm{d}u = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{e^{-(x-i)\,u}}{-(x-i)}\right]_0^A = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}.$$

En prenant la partie réelle, on obtient : $\int_0^{+\infty} \cos(u)\, e^{-x\,u}\, \mathrm{d}u = \frac{x}{x^2+1}$ pour $x > 0$, d'où :

$$L''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(u))\, e^{-x\,u}\, \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-x\,u}\, \mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \cos(u)\, e^{-x\,u}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

b) Par intégration, on obtient une constante réelle C telle qu'on ait pour $x > 0$:

$$L'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\, \ln\!\left(x^2+1\right) + C$$

Par intégration par parties, on obtient (quitte à écrire $x^2 = \left(x^2+1\right) - 1$) :

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \mathrm{d}x = x\ln(x) - x + \text{Cte}.$$

$$\int \ln\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = x\ln\left(x^2+1\right) - 2\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$
$$= x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\operatorname{Arctan}(x) + \text{Cte}.$$

On obtient ainsi une constante réelle D telle qu'on ait pour $x > 0$:

$$L(x) = (x\ln(x) - x) - \frac{1}{2}\left(x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\operatorname{Arctan}(x)\right) + Cx + D.$$

Et en simplifiant et regroupant les logarithmes :

$$L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - \operatorname{Arctan}(x) + Cx + D.$$

c) Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{2x}$, qui tend vers 0 en $+\infty$.

On observe donc que si $C \neq 0$, $L(x)$ tend vers l'infini avec le signe de C.
Comme $\lim_{+\infty} L = 0$, on a donc $C = 0$, et il reste $\lim_{+\infty} L = -\frac{\pi}{2} + D$, donc $D = \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\forall\, x > 0,\quad L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Et comme on a établi la continuité de L sur $[0, +\infty[$ à la question 2.(a), il vient :

$$L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \;=\; \lim_{x\to 0} L(x) = \frac{\pi}{2}.$$

4°) *Etude de l'intégrale I_1*

Pour tout réel positif x, on a $\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \cos(x)$.

Comme le cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$, l'intégrale I_1 diverge donc.

5°) *Etude d'une fonction auxiliaire f_n*

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \frac{1-\cos\left(t^n\right)}{t^n}.$$

La fonction f_n est clairement continue sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est positive de manière évidente, et comme $|1-\cos(t^n)| \leq 1 + |\cos(t^n)| \leq 2$, on a donc $0 \leq f_n(t) \leq 2/t^n$ pour $t > 0$.

b) Au voisinage de 0, on sait que $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$, d'où résulte que :

$$\lim_{t\to 0} f_n(t) = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(t^n)}{t^n} = \lim_{u\to 0} \frac{\frac{t^{2n}}{2} + o\left(t^{2n}\right)}{t^n} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{t^n}{2} + o(t^n)\right) = 0.$$

On pourra donc prolonger f_n par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$.

c) La fonction f_n est alors continue sur $[0, +\infty[$, positive, et majorée par $2/t^n$ sur $[1, +\infty[$. Comme $n \geq 2$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

6°) *Etude de l'intégrale I_n pour $n \geq 2$*

a) A l'aide d'une intégration par parties, on a pour $x > \varepsilon > 0$:

$$\int_\varepsilon^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^x \frac{1-\cos(t^n)}{t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{n-1}\Big[\frac{1-\cos(t^n)}{t^{n-1}}\Big]_\varepsilon^x + \frac{n}{n-1}\int_\varepsilon^x \sin(t^n)\,\mathrm{d}t.$$

L'expression entre crochets n'étant autre que $t\,f_n(t)$, il en résulte que :

$$\int_\varepsilon^x \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{x\,f_n(x)}{n} - \frac{\varepsilon\,f_n(\varepsilon)}{n} + \frac{n-1}{n}\int_\varepsilon^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) Observons le membre de droite lorsque x tend vers $+\infty$ et ε vers 0 :

- la limite de $x\,f_n(x)$ en $+\infty$ est nulle car $0 \leq x\,f_n(x) \leq \frac{2}{t^{n-1}}$ pour $x > 0$, et $n \geq 2$.
- la limite de $f_n(\varepsilon)$, et donc de $\varepsilon\,f_n(\varepsilon)$ est nulle en 0.
- la limite de l'intégrale $\int_\varepsilon^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Il en résulte que l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty}\sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ converge, et on a par passage à la limite :

$$I_n = \int_0^{+\infty}\sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{n-1}{n}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n-1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t^n)}{t^n}\,\mathrm{d}t.$$

d) L'application $t \longrightarrow u = t^n$ réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, de sorte que ce changement de variables ne modifie ni la nature, ni la valeur de l'intégrale, d'où :

$$I_n = \frac{n-1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t^n)}{t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{n-1}{n^2}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^{2-1/n}}\,\mathrm{d}u.$$

7°) *Equivalent de l'intégrale I_n*

a) Rappelons l'énoncé du théorème de convergence dominée, appliqué à $\int_a^b g_n(u)\,\mathrm{d}u$, où l'intervalle $|a, b|$ est quelconque, avec $- \leq \ \leq a < b \leq +\infty$:

- si la suite de fonctions continues par morceaux (g_n) converge simplement sur $|a, b|$ vers une fonction continue par morceaux,
- si la suite (g_n) est dominée indépendamment de n par une fonction φ intégrable sur $|a, b|$, ce qui signifie que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, u \in |a, b|$, $|g_n(u)| \leq \varphi(u)$,

alors les intégrales suivantes existent et : $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b g_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} g_n(u)\,\mathrm{d}u$.

b) Appliquons ce résultat ici avec $g_n(u) = \frac{1-\cos(u)}{u^{2-1/n}}$ sur $]0, +\infty[$:

- la suite de fonctions continues (g_n) converge simplement vers $u \longrightarrow (1-\cos(u))\big/u^2$.
- la suite de fonctions continues (g_n) est dominée indépendamment de n comme suit :

$$0 \leq \frac{1-\cos(u)}{u^{2-1/n}} = \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,u^{1/n} \leq \varphi(u) = \left|\begin{array}{ll} \frac{1-\cos(u)}{u^2} & \text{si } 0 < u \leq 1. \\ \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,u^{1/2} & \text{si } u \geq 1. \end{array}\right.$$

(on a majoré $u^{1/n}$ par 1 sur $]0, 1]$ et par $u^{1/2}$ sur $[1, +\infty[$ puisque $n \geq 2$).
La fonction dominante φ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1/2, et intégrable car majorée sur $[1, +\infty[$ par $\frac{2}{u^{3/2}}$, intégrable sur $[1,+\infty[$.

Avec le résultat de la partie I donnant $L(0) = 1/2$, on a donc par convergence dominée :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^{2-1/n}}\, \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

c) On déduit des résultats précédents que : $I_n = \frac{n-1}{n^2} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{2-1/n}}\, \mathrm{d}u \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$.

8°) *Intégrale d'une fonction rationnelle auxiliaire*

a) Pour tout réel $\theta \notin \pi\,\mathbb{Z}$, le nombre $e^{i\theta}$ n'est pas réel et on a :

$$\frac{1}{t - e^{i\theta}} = \frac{t - e^{-i\theta}}{\left(t - e^{i\theta}\right)\left(t - e^{-i\theta}\right)} = \frac{t - \cos(\theta)}{t^2 - 2\,t\cos(\theta) + 1} + i\,\frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2\,t\cos(\theta) + 1}.$$

b) Une intégration facile donne alors (sachant que $\sin(\theta) \neq 0$) :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t - e^{i\theta}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2\,t - 2\cos(\theta))\,\mathrm{d}t}{t^2 - 2\,t\cos(\theta) + 1} + i\int \frac{\sin(\theta)\,\mathrm{d}t}{(t - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2 - 2\,t\cos(\theta) + 1\right) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + C.$$

c) Les racines carrées du nombre complexe $i = e^{i\pi/2}$ sont $\pm e^{i\pi/4}$, ou $e^{i\pi/4}$ et $e^{5i\pi/4}$.
On en déduit que $X^2 - i = \left(X - e^{i\pi/4}\right)\left(X + e^{i\pi/4}\right) = \left(X - e^{i\pi/4}\right)\left(X - e^{5i\pi/4}\right)$.
Par décomposition en éléments simples, il existe des constantes A et B telles que :

$$\frac{1}{t^2 - i} = \frac{1}{\left(t - e^{i\pi/4}\right)\left(t - e^{5i\pi/4}\right)} = \frac{A}{t - e^{i\pi/4}} + \frac{B}{t - e^{5i\pi/4}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{2}\left(\frac{1}{t - e^{i\pi/4}} - \frac{1}{t - e^{5i\pi/4}}\right).$$

On obtient A en multipliant par $t - e^{i\pi/4}$ et en faisant $t = e^{i\pi/4}$, et de façon analogue pour B.

d) On déduit des résultats précédents qu'une primitive de $t \longrightarrow 1\Big/\left(t^2 - i\right)$ est donc :

$$\frac{e^{-i\pi/4}}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2 - 2\,t\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1}{t^2 - 2\,t\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 1}\right) + i\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{t - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{t - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\right)\right) + C\right).$$

Soit encore compte tenu de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{e^{-i\pi/4}}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2 + \sqrt{2}\,t + 1}{t^2 - \sqrt{2}\,t + 1}\right) + i\left(\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}\,t - 1\right) + \mathrm{Arctan}\left(t\sqrt{2} + 1\right)\right) - C\right).$$

L'expression logarithmique est clairement nulle en 0 et en $+\infty$, et on en déduit alors que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - i} = \frac{i\,e^{-i\pi/4}}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(-1) + \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(1)\right) = \frac{\pi}{2}\,e^{i\pi/4}.$$

9°) Considérons les fonctions f et F définies par :

$$f(x,t)=\frac{\exp\left(-x^2\left(t^2-i\right)\right)}{t^2-i}\quad ;\quad F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\exp\left(-x^2\left(t^2-i\right)\right)}{t^2-i}\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Pour tout réel x, la fonction f est continue en sa variable t et vérifie :

$$\left|\frac{\exp\left(-x^2\left(t^2-i\right)\right)}{t^2-i}\right|=\frac{\exp\left(-x^2\,t^2\right)}{\left|t^2-i\right|}=\frac{\exp\left(-x^2\,t^2\right)}{\sqrt{t^4+1}}\le\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\underset{\pm\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}.$$

Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $F(x)$ est absolument convergente.

b) La fonction F est continue d'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre puisque la fonction f figurant sous le signe intégral est :

- continue par rapport à chacune de ses variables t et x.
- dominée indépendamment du paramètre x par la fonction intégrable $t\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

De plus, on a d'après l'inégalité de la moyenne :

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{\exp\left(-x^2\left(t^2-i\right)\right)}{t^2-i}\,\mathrm{d}t\right|\le\int_0^{+\infty}\frac{\exp\left(-x^2\,t^2\right)}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t\le\int_0^{+\infty}\exp\left(-x^2\,t^2\right)\mathrm{d}t.$$

Et en posant $u=x\,t$, on vérifie que F a pour limite 0 en $+\infty$:

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{\exp\left(-x^2\left(t^2-i\right)\right)}{t^2-i}\,\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

c) La fonction F est de classe C^1 sur tout segment $[a,b]$ avec $b>a>0$, donc sur $]0,+\infty[$. Ceci résulte du théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre puisque la fonction sous le signe intégral a pour dérivée par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\exp\left(-x^2\left(t^2-i\right)\right)}{t^2-i}\right)=-2\,x\exp\left(-x^2\left(t^2-i\right)\right).$$

Pour x décrivant $[a,b]$, cette fonction est :

- continue par rapport à chacune des variables t et x.
- dominée indépendamment de $x\in[a,b]$ par la fonction intégrable $t\longrightarrow 2\,b\exp\left(-a^2\,t^2\right)$.

Ainsi, F est de classe C^1 sur tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et en posant $u=x\,t$:

$$F'(x)=-2\,x\int_0^{+\infty}\exp\left(-x^2\left(t^2-i\right)\right)\mathrm{d}t=-2\,x\exp\left(i\,x^2\right)\int_0^{+\infty}\exp\left(-x^2\,t^2\right)\mathrm{d}t=-\sqrt{\pi}\,\exp\left(i\,x^2\right).$$

d) Puisque F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, on peut intégrer sur $[a,x]$ avec $0<a<x$:

$$F(x)-F(a)=-\sqrt{\pi}\int_a^x\exp\left(i\,t^2\right)\mathrm{d}t.$$

Comme f est continue en 0, on obtient en faisant tendre a vers 0 :

$$F(x)-F(0)=-\sqrt{\pi}\int_0^x\exp\left(i\,t^2\right)\mathrm{d}t.$$

Compte tenu de la valeur de l'intégrale $F(0)=\frac{\pi}{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$ obtenue au 8°, et comme on a vu que la limite de $F(x)$ est nulle quand x tend vers $+\infty$, on obtient par passage à la limite :

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(i\,t^2\right)\mathrm{d}t=\frac{F(0)}{\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right).$$

En prenant la partie imaginaire, il vient : $I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.
