# E.P.I.T.A. 2015

**Epreuve optionnelle de mathématiques (2h)**

---

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction $u_n$ sur l'intervalle $I = ]-1, +\infty[$ par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

On se propose dans ce problème d'étudier quelques propriétés de la somme de la série de fonctions définie (lorsqu'elle converge) par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

## PARTIE I : préliminaires sur les séries de Riemann

1°) *Etude de la série de Riemann pour $x = 1$*

a) Justifier l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$ :

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{n}.$$

b) En posant $H_p = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}$ pour tout entier $p \geq 1$, en déduire que :

$$H_p - 1 \leq \int_1^p \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq H_p - \frac{1}{p}.$$

c) Etablir l'encadrement $\ln(p) \leq H_p \leq \ln(p) + 1$, puis montrer que la suite $p \longrightarrow H_p - \ln(p)$ admet une limite finie $\gamma$ (c'est la constante d'Euler, approximativement égale à 0,577...).
Ainsi donc, on a l'égalité $H_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = \ln(p) + \gamma + o(1)$ lorsque l'entier $p$ tend vers $+\infty$.

2°) *Etude de la série de Riemann pour $x > 1$*

a) Justifier l'inégalité suivante pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > 1$ :

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}.$$

b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge pour tout réel $x > 1$,

Dans la suite, on conviendra donc de poser : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ pour tout réel $x > 1$.

c) Etablir que $0 \leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}$ pour $x > 1$, et en déduire que $1 \leq \zeta(x) \leq 2$ pour $x \geq 2$.

## PARTIE II : Etude de la fonction *F*

3°) *Convergence de la série définissant F*

a) Montrer que la série définissant $F$ converge simplement sur l'intervalle $I = ]-1, +\infty[$.

b) Etudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de la fonction $u_n$ sur $I = ]-1, +\infty[$.

c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, 0]$ où $-1 < a \leq 0$, sur $[0, b]$ où $b \geq 0$, et plus généralement sur tout segment $[a, b]$ où $-1 < a \leq 0 \leq b$.

d) Etablir que $F$ est continue sur $I = ]-1, +\infty[$.

4°) *Equation fonctionnelle vérifiée par F*

a) Démontrer qu'on a pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel $x \in I = ]-1, +\infty[$ :

$$\sum_{n=1}^{p} u_n(x+1) - \sum_{n=1}^{p} u_n(x) = \ln(x+1) + H_p - \ln(x+p+1).$$

b) En déduire qu'on a : $F(x+1) - F(x) = \ln(1+x) + \gamma$ pour tout réel $x \in I = ]-1, +\infty[$.

c) En déduire la limite et un équivalent de $F(x)$ quand $x$ tend vers $-1$.

d) Pour tout entier naturel $m$, vérifier que $F(m) = \ln(m!) + m\gamma$.

5°) *Convergence de la série-dérivée de F*

a) Montrer que la série-dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'$ converge simplement sur $I = ]-1, +\infty[$.

b) Montrer qu'elle converge normalement sur tout segment $[a, b]$ où $-1 < a \leq 0 \leq b$.

c) Etablir que $F$ est de classe $C^1$ sur $I$ et préciser $F'(x)$ sous forme d'une série.

d) Préciser $F'(0)$ et vérifier que $F'(1) = 1$.

6°) *Etude de F au voisinage de $+\infty$*

a) Vérifier que $F(x) \geq x - \ln(1+x)$ pour tout réel $x \in I = ]-1, +\infty[$.
En déduire la limite de $F(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

b) Pour tout réel $x > 0$, étudier l'existence et la valeur de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t(t+x)}$.

c) Justifier l'encadrement suivant pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > 0$ :

$$\frac{x}{(n+1)(n+1+x)} \leq \int_n^{n+1} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t(t+x)} \leq \frac{x}{n(n+x)},$$

puis déterminer un encadrement et un équivalent de $F'(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

d) En déduire par intégration que $F(x) \sim x\ln(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

7°) *La fonction F est de classe $C^\infty$ sur I*

a) Démontrer par récurrence sur $k \geq 2$ que $F$ est de classe $C^k$ sur $I$ et qu'on a :

$$\forall\, x > -1, \quad F^{(k)}(x) = (-1)^k\,(k-1)!\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^k}.$$

b) Préciser $F(0)$ et $F'(0)$, puis exprimer $F^{(k)}(0)$ en fonction de $\zeta(k)$ pour $k \geq 2$.

c) A l'aide des résultats précédents, donner l'allure de la fonction $F$ sur $I = ]-1, +\infty[$.

8°) *Convergence de la série de Taylor de F vers F*

a) Expliciter alors la série de Taylor $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$ de la fonction $F$.
Etablir, pour tout entier $k \geq 2$ et tout réel $x$, l'inégalité $\frac{1}{k}|x|^k \leq \left|\frac{F^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right| \leq \frac{2}{k}|x|^k$.
En déduire le rayon de convergence $R$ de la série de Taylor de $F$.

b) Donner les développements en série entière et les rayons de convergence des fonctions :

$$u(x) = \ln(1+x) \qquad ; \qquad v(x) = x - \ln(1+x).$$

c) En déduire l'égalité suivante pour $-1 < x < 1$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(k)\,x^k.$$

(On citera précisément le théorème utilisé et on vérifiera avec soin ses hypothèses).