E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

Dans ce problème, on désigne par n un entier supérieur ou égal à 2, par $\mathcal{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on fait les conventions suivantes :

- on identifie tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ et la matrice-colonne de ses composantes $x_1, \ldots, x_n$, et on définit la norme de ce vecteur x par :
$$\|x\|_\infty = \max(|x_i| \,/\, 1 \le i \le n).$$
En particulier, on note v_1 le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.
- on identifie tout endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui lui est associée dans la base canonique, et on définit la norme de cette matrice $A = \left(a_{i\,j}\right)$ par :
$$\|A\|_\infty = \max\left(\left|a_{i\,j}\right| \,\big/\, 1 \le i, j \le n\right).$$

On notera qu'une suite $k \longrightarrow A_k = \left(a_{i\,j}^{(k)}\right)$ de matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge donc vers une matrice $A = \left(a_{i\,j}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si la suite $k \longrightarrow \|A_k - A\|_\infty$ tend vers 0, donc si et seulement si les n^2 suites $k \longrightarrow a_{i\,j}^{(k)}$ des coefficients des matrices A_k convergent respectivement vers les n^2 coefficients $a_{i\,j}$ de la matrice A.

Enfin, on désigne par $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices dites *stochastiques* d'ordre n, c'est à dire l'ensemble des matrices $M = \left(m_{i\,j}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

1) les n^2 coefficients $m_{i\,j}$ de la matrice M sont des nombres réels positifs.
2) la somme des éléments de chacune des n lignes de la matrice M vaut 1 :
$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad m_{i\,1} + m_{i\,2} + \ \ldots\ + m_{i\,n} = 1.$$

Ces matrices stochastiques jouent un rôle important, en particulier en calcul des probabilités comme le montre l'exemple traité dans la partie I. Dans la partie II, qui est indépendante, on étudie plus généralement la suite des puissances d'une matrice stochastique $M \in \mathcal{S}_n$.

■ Partie I : une intervention des matrices stochastiques en probabilités

On considère un combat entre deux tireurs A et B qui se déroule en une suite d'épreuves où A et B tirent simultanément l'un sur l'autre de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins un des deux tireurs :

- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 2/3.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/3.
- Lorsqu'un tireur est atteint, il est définivement éliminé des épreuves suivantes.
- Les résultats des différents tirs sont supposés indépendants les uns des autres.

Pour tout entier $n \ge 1$, on considère les événements suivants :

- AB$_n$: "à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve, A et B ne sont pas encore éliminés".
- A$_n$: "à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve, seul A n'est pas encore éliminé".
- B$_n$: "à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve, seul B n'est pas encore éliminé".
- $\emptyset_n$: "à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve, les deux tireurs sont éliminés".

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par E_n la matrice-ligne à 4 colonnes dont les éléments successifs sont les probabilités des 4 événements AB_n, A_n, B_n, $\emptyset_n$:

$$E_n = (\mathbb{P}(\mathrm{AB}_n), \mathbb{P}(\mathrm{A}_n), \mathbb{P}(\mathrm{B}_n), \mathbb{P}(\emptyset_n)).$$

Pour $n = 0$, comme A et B sont présents au début du combat, on convient donc de poser :

$$E_0 = (\mathbb{P}(\mathrm{AB}_0), \mathbb{P}(\mathrm{A}_0), \mathbb{P}(\mathrm{B}_0), \mathbb{P}(\emptyset_0)) = (1,\ 0,\ 0,\ 0).$$

1°) *Calculs de probabilités conditionnelles*

a) Vérifier que $\mathbb{P}_{\mathrm{AB}_n}(\mathrm{AB}_{n+1}) = \frac{2}{9}$ (on justifiera cette réponse).

b) Déterminer (en le justifiant) $\mathbb{P}_{\mathrm{AB}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$, $\mathbb{P}_{\mathrm{AB}_n}(\mathrm{B}_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\mathrm{AB}_n}(\emptyset_{n+1})$.

c) Rappeler la formule des probabilités totales, puis en l'appliquant à un système complet d'événements correctement choisi, expliciter une matrice carrée M d'ordre 4 telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad E_{n+1} = E_n\, M.$$

Vérifier que la matrice M ainsi obtenue est stochastique d'ordre 4, et que $E_n = E_0\, M^n$.

2°) *Diagonalisation de la matrice M*

a) Préciser les valeurs propres de la matrice M avec leurs ordres de multiplicité.

b) Etablir que la matrice M est diagonalisable et préciser les sous-espaces propres de M.

c) On considère 3 réels x, y, z et la matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer x, y, z pour que les vecteurs-colonnes de P soient des vecteurs propres de M.

d) Vérifier que P est inversible, préciser la matrice $D = P^{-1}\, M\, P$ et expliciter P^{-1}.

3°) *Probabilités pour que A ou B remportent le combat*

a) Expliciter la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite matricielle $n \longrightarrow D^n$.
Exprimer M^n en fonction de D^n, et expliciter la limite de la suite matricielle $n \longrightarrow M^n$.

b) En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite matricielle $n \longrightarrow E_n$, puis préciser les probabilités pour que A ou B remportent le combat.

4°) *Durée moyenne du combat*

Soit T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves réalisées avant la fin du combat.

a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(T = 1)$.

b) Pour tout entier naturel n, comparer les événements $\mathrm{AB}_1 \cap \mathrm{AB}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{AB}_n$ et $T > n$.
En déduire la probabilité $\mathbb{P}(T > n)$, puis vérifier que $\mathbb{P}(T = n) = \frac{7}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$.

c) Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)$ et l'espérance de la variable aléatoire T.

■ Partie II : étude des puissances des matrices stochastiques

Dans toute cette partie, on désigne par M une matrice stochastique d'ordre n et on se propose d'étudier la convergence de la suite géométrique $k \longrightarrow M^k$, et plus généralement de la suite de ses moyennes de Cesàro $k \longrightarrow C_k$, définies par $C_k = \frac{I_n + M + M^2 + \ldots + M^k}{k+1}$.

5°) *Premiers résultats de convergence*

a) Etablir que l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices stochastiques est stable par produit.

b) Etablir que la limite éventuelle d'une suite de matrices stochastiques est stochastique.

c) Démontrer, si la suite $\left(M^k\right)$ converge vers L, que L est une matrice de projection.

(On pourra à cet effet déterminer de deux manières la limite de la suite $\left(M^{2k}\right)$).

d) Démontrer, si la suite $\left(M^k\right)$ converge vers L, que la suite (C_k) converge aussi vers L.

6°) *L'espace* $\mathbb{C}^n$ *est somme directe de* $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ *et de* $\mathrm{Im}(M - I_n)$

a) Déterminer Mv_1 et en déduire que 1 est valeur propre de M.

b) Etablir l'inégalité $\|Mx\|_\infty \le \|x\|_\infty$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$.
En déduire que toute valeur propre λ de M est de module inférieur ou égal à 1.
Quelles inégalités en déduit-on sur le déterminant et la trace de M ?
Celles-ci peuvent-elles être réalisées?

c) On considère un vecteur $y = Mx - x$ appartenant à $\mathrm{Im}(M - I_n)$.
Etablir, si de plus $y \in \mathrm{Ker}(M - I_n)$, que $M^k x = ky + x$, puis que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\|y\|_\infty \le \frac{2}{k}\, \|x\|_\infty$.

d) En déduire que y est nul, puis que : $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(M - I_n) \oplus \mathrm{Im}(M - I_n)$.

Dans toute la suite du problème, on convient de désigner par P la matrice du projecteur sur le sous-espace $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ dans la direction de son supplémentaire $\mathrm{Im}(M - I_n)$.

7°) *Etude de la convergence de la suite* $k \longrightarrow C_k$

a) On décompose un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sur la somme directe $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(M - I_n) \oplus \mathrm{Im}(M - I_n)$
en posant $x = x_1 + x_2$ où $x_1 = Px \in \mathrm{Ker}(M - I_n)$ et $x_2 = Mz - z \in \mathrm{Im}(M - I_n)$.
Donner l'expression de $C_k\, x$ et montrer que $\|C_k\, x - Px\|_\infty \le \frac{2\,\|z\|_\infty}{k+1}$.

b) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{C}^n$, $\lim_{k \to +\infty} C_k\, x = Px$, puis que : $\lim_{k \to +\infty} C_k = P$.

c) En déduire la limite de la suite $\left(M^k\right)$ lorsque celle-ci est convergente.

8°) *Etude de la convergence de la suite* $k \longrightarrow M^k$

On suppose la matrice M diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, et on fait l'hypothèse supplémentaire suivante : pour $2 \le i \le p$, on a $|\lambda_i| < 1$.

a) Etablir, si x est un vecteur propre de M associé à une valeur propre λ distincte de 1, qu'on a l'égalité : $(\lambda - 1)\, x = (M - I_n)\, x$.
En déduire, si λ est une valeur propre distincte de 1, que : $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \mathrm{Im}(M - I_n)$.

b) Etablir l'inclusion : $\mathrm{Ker}(M - \lambda_2 I_n) \oplus \ \ldots \ \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_p I_n)\big) \subset \mathrm{Im}(M - I_n)$, et montrer qu'on a l'égalité : $\mathrm{Ker}(M - \lambda_2 I_n) \oplus \ \ldots \ \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_p I_n)\big) = \mathrm{Im}(M - I_n)$.

c) On décompose un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sur la somme directe des sous-espaces propres de M en posant $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ avec $x_i \in \mathrm{Ker}(M - \lambda_i I_n)$ pour $1 \le i \le p$.
Montrer que $x_1 = Px$, exprimer $M^k x - Px$ à l'aide de k, de $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$, de $x_2, \ldots, x_p$, puis en déduire que $\lim_{k \to +\infty} M^k x = Px$, puis que $\lim_{k \to +\infty} M^k = P$.

d) Donner enfin l'exemple d'une matrice stochastique M telle que la suite $k \longrightarrow M^k$ diverge.