Concours EPITA – IPSA Épreuve de physique
A propos de la sonde Rosetta
Corrigé de l'épreuve

A Navigation spatiale

Questions préliminaires

1 Compte-tenu des symétries, on détermine l'expression du champ de gravitation en utilisant le théorème de Gauss.
On commence par caractériser le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(M)$ créé en un point M de l'espace.
On note que tout plan contenant l'axe OM est un plan de symétrie pour la distribution de masse. Il s'agit donc également d'un plan de symétrie pour le champ. L'axe OM est donc un axe de symétrie et $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}_r(M)\vec{e}_r$ avec $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.
Le système étant invariant par toute rotation autour de tout axe passant par O, on a $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}_r(r)\vec{e}_r$.
On choisit comme surface de Gauss la sphère de rayon r et de centre O. On applique le théorème de Gauss : $\oiint \vec{\mathcal{G}}(M)d\vec{S} = -4\pi G M$.
Comme $\oiint \vec{\mathcal{G}}(M)d\vec{S} = \mathcal{G}_r(r)4\pi r^2$, on trouve $\mathcal{G}_r(r) = -\dfrac{GM}{r^2}$ (avec bien sûr $r \geq R$)
On a donc $\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = -\dfrac{GM}{r^2}\vec{e}_r}$

2 On en déduit l'expression de la force de gravitation exercée par le Soleil sur un objet de masse m : $\boxed{\vec{F} = m\mathcal{G}_r(r)\vec{e}_r = -\dfrac{GM_S m}{r^2}\vec{e}_r}$

3 Une force est conservative si le travail élémentaire associé à un déplacement infinitésimal peut s'écrire : $\delta W = -dE_P$ où E_P est l'énergie potentielle dont dérive la force conservative.
On a ici $\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -\dfrac{GM_S m}{r^2}dr$ et on peut donc écrire $dE_P = \dfrac{GM_S m}{r^2}dr$ soit en intégrant $\boxed{E_P = -\dfrac{GM_S m}{r}}$ en choisissant de prendre l'énergie potentielle nulle à l'infini.

4 La force de gravitation est une force centrale. Il y a donc conservation du moment cinétique, ce qui impose que le mouvement de l'astre est plan.
Pour le montrer, on applique le théorème du moment cinétique. On se place dans le référentiel héliocentrique. Le système étudié est l'astre de masse m, que l'on supposera ponctuel. Il est soumis à la force d'attraction gravitationnelle du Soleil. On note O le centre du Soleil.
Le théorème du moment cinétique conduit à : $\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ sont parallèles… Le moment cinétique est donc constant $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{cste}$.
Les vecteurs position et vitesse sont orthogonaux à une direction fixe. Ils définissent donc le plan dans lequel s'effectue le mouvement de l'astre.

5 On se place toujours dans le référentiel héliocentrique. On suppose que le mouvement de la Terre est circulaire, de rayon R, autour du Soleil. Elle soumise à la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F} = -\frac{G M_S m}{R^2}\vec{e}_r$. On applique le théorème du centre d'inertie $m\vec{a} = \vec{F}$

avec $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$ (en utilisant la base cylindrique)

on obtient $\begin{cases} -m R\dot{\theta}^2 = -\frac{G M_S m}{R^2} \\ m R\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$

La seconde équation conduit après intégration à $\dot{\theta} = \text{cste}$ soit $v = R\dot{\theta} = \text{cste}$, ce qui montre que si le mouvement est circulaire alors il est uniforme.

On obtient l'expression de la vitesse avec $m\frac{v^2}{R} = \frac{G M_S m}{R^2}$ soit $\boxed{v = \sqrt{\frac{G M_S}{R}}}$

On trouve $\boxed{v = 30\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$

6 Avant la manœuvre, l'orbite est circulaire de rayon R_1. La vitesse de la sonde est $v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}}$. Après la manœuvre, l'orbite est elliptique de demi grand axe $\frac{1}{2}(R_1+R_2)$ et la vitesse de la sonde est $v_1 + \Delta v_1$. L'énergie mécanique sur l'orbite de transfert s'écrit : $E_m = -\frac{GM_S m}{R_1+R_2} = \frac{1}{2}m(v_1+\Delta v_1)^2 - \frac{GM_S m}{R_1}$

On obtient donc $(v_1+\Delta v_1)^2 = \frac{2GM_S}{R_1}\left(1-\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)$ soit $v_1+\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}}\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}$

On en déduit $\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}}\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}}\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}}$

et donc $\boxed{\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - 1\right)}$

7 On fait l'application numérique avec $R_1 = 1$ ua et $R_2 = 6$ ua.

$\boxed{\Delta v_1 = 30\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}\left(\sqrt{\frac{2 \times 6}{7}} - 1\right) = 9\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$ (que l'on écrit avec 1 seul chiffre significatif puisque R_1 est donné avec un seul chiffre significatif...)

Lien entre budget Δv et carburant

8 L'énoncé donne l'équation du mouvement de la sonde. *Pour information, on obtient cette équation en utilisant la conservation de la quantité de mouvement du système {fusée-gaz}...*

On réécrit l'équation précédente sous la forme $-\frac{dm}{m} = \frac{dv}{v_e}$. On intègre en tenant compte que lorsque la masse de la fusée passe de $m+\Delta m$ à m, sa vitesse augmente de Δv : $\int_{m+\Delta m}^{m} -\frac{dm}{m} = \int_{v}^{v+\Delta v} \frac{dv}{v_e}$ qui conduit à $\ln\left(\frac{m+\Delta m}{m}\right) = \frac{\Delta v}{v_e}$

Soit finalement $\boxed{\Delta v = v_e \ln\left(\frac{m+\Delta m}{m}\right)}$ (équation de Tsiolkovski)

9 Dans la formule de Tsiolkovski, Δm est la masse de carburant. On a alors $\Delta m = r\,m$ et donc

$$\Delta v = v_e \ln(1+r) \quad \text{soit} \quad \boxed{r = \exp\left(\frac{\Delta v}{v_e}\right) - 1}$$

10 On applique le premier principe de la thermodynamique des systèmes ouverts...
Les gaz sont admis dans la tuyère du réacteur à une température $T_1 = 4{,}0\ 10^3$ K, à la pression P_1, à une vitesse négligeable. Ils ressortent à une température T_2 supposée proche de 0 K (on est dans l'espace) et à la vitesse v_e.
L'évolution est supposée adiabatique, le premier principe des systèmes ouverts s'écrit alors $\Delta h + \Delta e_C = 0$ où h est l'enthalpie massique et e_C l'énergie cinétique massique.

On a $\Delta h = c_P \Delta T = \dfrac{C_{pm}}{M} \Delta T$ avec $\Delta T = -T_1$ et $\Delta e_C = \dfrac{1}{2} v_e^2$

On en déduit que $\boxed{v_e = \sqrt{\dfrac{2\,C_{pm} T_1}{M}}}$ soit $\boxed{v_e = 3{,}0 \ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$

11 Pour une injection directe, le delta v nécessaire est $\Delta v = 9{,}2\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. On lit sur le graphique que cela correspond à $r \approx 12$. Il faut donc une masse de carburant de près de 16 t. La masse de sonde au décollage serait alors de 17t ce qui excède largement les capacités du lanceur (7t)
Il n'est donc pas envisageable pour la sonde d'atteindre directement l'orbite de la comète Tchourioumov-Guérassimenko. Une autre stratégie doit être utilisée...

12

12.1 On se place dans le référentiel géocentrique. La conservation de l'énergie mécanique impose $\dfrac{1}{2} m V_1^2 = \dfrac{1}{2} m V_2^2$ soit $V_1 = V_2 = V$

12.2 Les vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de la sonde dans le référentiel héliocentrique ont pour expression : $\vec{v}_1 = \vec{V}_1 + \vec{v}_T$ et $\vec{v}_2 = \vec{V}_2 + \vec{v}_T$
Soit $\vec{v}_1 = V\vec{e}_x + v_T \vec{e}_y$ et $\vec{v}_2 = V\cos\theta\,\vec{e}_x + (V\sin\theta + v_T)\vec{e}_y$
On a donc $\Delta v = v_2 - v_1 = \sqrt{V^2\cos^2\theta + (V\sin\theta + v_T)^2} - \sqrt{V^2 + v_T^2}$

que l'on peut aussi écrire sous la forme $\boxed{\Delta v = \sqrt{V^2 + v_T^2}\left(\sqrt{1 + \dfrac{2\,V v_T}{V^2 + v_T^2}\sin\theta} - 1\right)}$

On trouve $\boxed{\Delta v = 3 \ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$

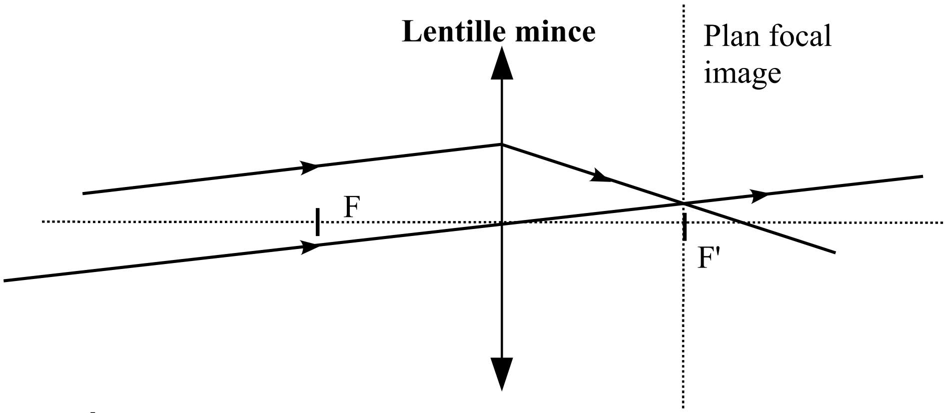
13 L'assistance gravitationnelle permet donc d'augmenter la vitesse de la sonde (dans le référentiel héliocentrique) sans avoir à utiliser de carburant. En contre-partie, il faut synchroniser la trajectoire de la sonde avec celles des planètes qui seront utilisées … ce qui augmente la durée du voyage vers la comète…

B L'instrument OSIRIS

Questions préliminaires

1 Dans les conditions de Gauss, les rayons lumineux sont proches de l'axe optique et peu inclinés par rapport à celui-ci. Le système optique est alors stigmatique et aplanétique, qui sont les deux propriétés nécessaires permettant de former des images de bonne qualité…

2 On peut par exemple utiliser le fait que l'image d'un point objet à l'infini est située sur le plan focal image. Les rayons émergents associés se coupent alors en un même point du plan focal image.



Détection de la comète

3 L'image d'un objet à l'infini se forme dans le plan focal image. Le CCD est donc situé dans le plan focal image….

4 On cherche à déterminer si les caractéristiques de la caméra WAC permettent la détection de la comète à une distance de 10^6 de km.

4.1 Le diamètre angulaire θ du noyau à une distance de 10^6 km est $\theta = 4\ 10^{-6}$ rad ce qui correspond à une image de diamètre $d = \theta f' = 0{,}5$ µm bien inférieure à la taille d'un pixel.

4.2 L'image d'un point objet à l'infini, du fait de la diffraction, est une tache de rayon angulaire $1{,}22\frac{\lambda}{D}$ ce qui correspond à une tache de diamètre $d = 2{,}44\frac{\lambda f'}{D}$ sur le CCD.

On trouve $\boxed{d = 9{,}8\ \mu m}$, ce qui est toujours inférieur à la taille d'un pixel.

4.3 La puissance lumineuse reçue par la comète est $P_{incident} = F S \frac{1}{Rsc^2}$ où F est la constante solaire, S la surface du noyau, R_{SC} est la distance en ua à laquelle se trouve la comète du Soleil. La puissance réfléchie correspond donc à $\boxed{P_{émis} = \frac{r F S}{R_{SC}^2} = 6{,}3\ 10^7\ W}$.

4.4 On suppose que la comète renvoie de façon isotrope la puissance reçue. Celle-ci se répartie donc uniformément sur la 1/2 sphère située devant la face éclairée de la comète. La caméra WAC en reçoit une fraction correspondant à $P_{WAC} = T P_e \frac{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2}{2\pi R_R^2} = T P_e \frac{D^2}{8 R_R^2}$ où D est le diamètre de l'objectif et R_R la distance entre la comète et Rosetta. On trouve $\boxed{P_{WAC} = 3 \cdot 10^{-15}\ W}$

4.5 Le nombre $\dot{N}$ de photons par seconde correspondant à cette puissance est donnée par la relation $\dot{N} h\upsilon = P_{WAC}$ où $\upsilon = \frac{c}{\lambda}$ est la fréquence d'un photon. On prend des photons de longueur d'onde 0,5 µm (valeur située au centre de la bande passante). On trouve $\boxed{\dot{N} = 8 \cdot 10^3 s^{-1}}$

4.6 Avec une durée d'acquisition de 1s par image, $N = 8\ 10^3$ photons arrivent sur un pixel. Le rapport signal sur bruit est alors $\boxed{S/B = \sqrt{N} = 90}$, ce qui est supérieur à 10 comme demandé. La comète est bien détectée par la caméra WAC.

Autour du capteur CCD des caméras WAC et NAC

5 La capacité d'un condensateur plan dans le vide est $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$. En présence de matière entre les armatures, on a $C = \varepsilon_r C_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$. En utilisant $U = \frac{Q}{C}$ et Q = N_{max} e, on obtient $\boxed{N_{max} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S U}{d e} \simeq 1 \cdot 10^5}$

6 L'énoncé indique que les électrons se déplacent librement dans un pixel que l'on modélise par une boîte de largeur L= 13,5µm. On cherche le nombre d'électrons nécessaires pour atteindre une énergie de 5 eV. L'énergie mécanique d'un électron s'écrit $E = E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$. Par analogie avec les ondes stationnaires d'une corde vibrante, l'onde associée à un électron vérifie $L = n \frac{\lambda}{2}$ où λ la longueur d'onde de l'électron, $p = \frac{h}{\lambda}$ et n un nombre entier.

On a donc $E = \frac{h^2}{8 m L^2} n^2$ avec $n = \frac{N_{max}}{2}$ (On place deux électrons par niveau d'énergie du fait du principe d'exclusion de Pauli). On obtient finalement $\boxed{N_{max} = \frac{4\sqrt{2} L}{h} \sqrt{mE}}$ soit $\boxed{N_{max} = 1 \cdot 10^5}$

Les deux méthodes proposées conduisent à des valeurs similaires ...