E.P.I.T.A.

Corrigé de l'épreuve de mathématiques (3 h)

1°) *Calculs de probabilités conditionnelles*

a) La probabilité $\mathbb{P}_{AB_n}(AB_{n+1})$ est la probabilité, sachant que A et B sont face à face, que A et B ratent leurs cibles, et par indépendance des résultats des tirs, c'est $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

b) La probabilité $\mathbb{P}_{AB_n}(A_{n+1})$ est la probabilité, sachant que A et B sont face à face, que A réussisse son tir et que B rate le sien.
Par indépendance des résultats des tirs, c'est $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.
De même, on s'assurera que $\mathbb{P}_{AB_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{9}$.
Enfin, la probabilité $\mathbb{P}_{AB_n}(\emptyset_{n+1})$ est la probabilité, sachant que A et B sont face à face, que A et B réussissent leurs tirs, et par indépendance des résultats des tirs, c'est $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

c) Comme $(AB_n, A_n, B_n, \emptyset_n)$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales montre que la probabilité $\mathbb{P}(AB_{n+1})$ est égale à :

$$\mathbb{P}_{AB_n}(AB_{n+1})\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}_{A_n}(AB_{n+1})\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(AB_{n+1})\,\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{\emptyset_n}(AB_{n+1})\,\mathbb{P}(\emptyset_n).$$

Comme $\mathbb{P}_{A_n}(AB_{n+1}) = \mathbb{P}_{B_n}(AB_{n+1}) = \mathbb{P}_{\emptyset_n}(AB_{n+1}) = 0$, il reste donc :

$$\mathbb{P}(AB_{n+1}) = \mathbb{P}_{AB_n}(AB_{n+1})\,\mathbb{P}(AB_n) = \frac{2}{9}\,\mathbb{P}(AB_n).$$

En raisonnant de même, *et en n'écrivant que les termes non nuls*, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{AB_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(A_n) = \frac{4}{9}\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}(A_n).$$

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{AB_n}(B_{n+1})\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\,\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{9}\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}(B_n).$$

$$\mathbb{P}(\emptyset_{n+1}) = \mathbb{P}_{AB_n}(\emptyset_{n+1})\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}_{\emptyset_n}(\emptyset_{n+1})\,\mathbb{P}(\emptyset_n) = \frac{2}{9}\,\mathbb{P}(AB_n) + \mathbb{P}(\emptyset_n).$$

Ces relations se traduisent matriciellement comme suit :

$$E_{n+1} = E_n \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et par récurrence facile, on a donc $E_n = E_0\, M^n = (1, 0, 0, 0)\, M^n$ où M est stochastique.

2°) *Diagonalisation de la matrice M*

a) La matrice M étant triangulaire, on lit sur sa diagonale ses valeurs propres : $\frac{2}{9}$, 1, 1, 1.

b) Le sous-espace propre associé à $\frac{2}{9}$ est clairement la droite Vect(e_1) où $e_1 = (1, 0, 0, 0)$.

En effet, si v est le vecteur de composantes x_1, x_2, x_3, x_4 dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$, alors l'égalité $M\, v = \frac{2}{9}\, v$ équivaut à $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Le sous-espace propre associé à 1 est l'hyperplan d'équation $7\,x_1 - 4\,x_2 - x_3 - 2\,x_4 = 0$.
En effet, si v est le vecteur de composantes x_1, x_2, x_3, x_4 dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$, alors l'égalité $M\, v = v$ équivaut à $7\,x_1 - 4\,x_2 - x_3 - 2\,x_4 = 0$.
Il est de dimension 3 en tant qu'hyperplan de $\mathbb{R}^4$, et la somme des dimensions des sous-espaces propres de M étant égale à $1 + 3 = 4$, la matrice M est diagonalisable.

c) On considère 3 réels x, y, z et la matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Le premier vecteur-colonne de P est vecteur propre associé à $\frac{2}{9}$.

Les vecteurs-colonnes suivants ne peuvent être associés à la valeur propre 2/9, et ils sont associés à 1 s'ils vérifient $7\,x_1 - 4\,x_2 - x_3 - 2\,x_4 = 0$. C'est le cas si $x = 4$, $y = 1$, $z = 2$.

d) La matrice P obtenue est inversible puisqu'elle est triangulaire avec $\det(P) = 7^3 \neq 0$.
En désignant par (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{C}^4$, on observe que :

$$P\,e_1 = e_1,\ P\,e_2 = 4\,e_1 + 7\,e_2,\ P\,e_3 = e_1 + 7\,e_3,\ P\,e_4 = 2\,e_1 + 7\,e_4.$$

Il en résulte que :

$$7\,e_2 = P\,e_2 - 4\,P\,e_1,\ 7\,e_3 = P\,e_3 - P\,e_1,\ 7\,e_4 = P\,e_4 - 2\,P\,e_1.$$

Puis en multipliant par P^{-1}:

$$P^{-1}\,e_1 = e_1,\ 7\,P^{-1}\,e_2 = e_2 - 4\,e_1,\ 7\,P^{-1}\,e_3 = e_3 - e_1,\ 7\,P^{-1}\,e_4 = e_4 - 2\,e_1.$$

La matrice inverse de P en résulte aussitôt :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sans faire aucun calcul, on observe que P est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres associés à $\frac{2}{9}$, 1, 1, 1.

Ainsi, $P^{-1}\,M\,P$ est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M dans la base de vecteurs propres précédente, et c'est donc la matrice suivante :

$$D = P^{-1}\,M\,P = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3°) *Probabilités pour que A ou B remportent le combat*

a) Par définition de la convergence d'une suite de matrices dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et par continuité des opérations matricielles, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = \lim_{n\to+\infty} P\,D^n\,P^{-1} = P\left(\lim_{n\to+\infty} D^n\right)P^{-1}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

b) Comme $E_n = (1, 0, 0, 0)\,M^n$, on a $\lim E_n = (1, 0, 0, 0)\lim M^n = \left(0, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

Donc A et B remportent le combat avec les probabilités $\frac{4}{7}$ et $\frac{1}{7}$, tous deux étant éliminés avec la probabilité $\frac{2}{7}$.

4°) *Durée moyenne du combat*

a) On a clairement $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{B}_1 \cup \emptyset_1)$, et ces trois événements étant deux à deux incompatibles, il vient $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_1) + \mathbb{P}(\mathrm{B}_1) + \mathbb{P}(\emptyset_1) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

b) Pour tout entier naturel n, on a $\mathrm{AB}_1 \cap \mathrm{AB}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{AB}_n = (T > n)$ car :

- si l'événement $\mathrm{AB}_1 \cap \mathrm{AB}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{AB}_n$ a lieu, le combat n'est pas fini à la $n^{\text{ème}}$ épreuve.
- si le combat n'est pas fini à la $n^{\text{ème}}$ épreuve, A et B sont encore en présence à ce moment et l'événement $\mathrm{AB}_1 \cap \mathrm{AB}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{AB}_n$ est bien réalisé.

Il en résulte qu'on a :

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(\mathrm{AB}_1 \cap \mathrm{AB}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{AB}_n) = \mathbb{P}(\mathrm{AB}_1)\,\mathbb{P}_{\mathrm{AB}_1}(\mathrm{AB}_2)\,\ldots\mathbb{P}_{\mathrm{AB}_1\cap\ldots\cap\mathrm{AB}_{n-1}}(\mathrm{AB}_n).$$

Il en résulte que $\mathbb{P}(T > n) = \left(\frac{2}{9}\right)^n$ et comme $(T > n-1) = (T = n) \cup (T > n)$, on a :

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n-1) - \mathbb{P}(T > n) = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{7}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}.$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre 2/9.

c) Un simple calcul faisant intervenir la série géométrique conduit à :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T = n) = \frac{7}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} = \frac{7}{9}\,\frac{1}{1-2/9} = 1.$$

De même, un calcul calcul faisant intervenir la série-dérivée de la série géométrique donne :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(T = n) = \frac{7}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} = \frac{7}{9}\,\frac{1}{(1-2/9)^2} = \frac{9}{7}.$$

■ Partie II

5°) *Premiers résultats de convergence*

a) Considérons deux matrices A, $B \in \mathcal{S}_n$ et montrons que $C = AB \in \mathcal{S}_n$:

- les coefficients $c_{i\,j} = \sum_{k=1}^n a_{i\,k}\, b_{k\,j}$ sont positifs puisque les $a_{i\,k}$ et $b_{k\,j}$ le sont.
- les sommes des lignes de $C = AB$ valent 1 puisqu'on a pour $1 \le i \le n$:

$$\sum_{j=1}^n c_{i\,j} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i\,k}\, b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i\,k}\, b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^n a_{i\,k} \left(\sum_{j=1}^n b_{k\,j} \right) = \sum_{k=1}^n a_{i\,k} = 1.$$

Il en résulte aussitôt que les puissances d'une matrice stochastique sont stochastiques.

b) Si (M_k) est une suite de matrices stochastiques convergeant vers M, on sait que les coefficients $m_{i\,j}^{(k)}$ de M_k convergent vers les coefficients $m_{i\,j}$ de M, et donc :

- les coefficients $m_{i\,j} = \lim_{k \to +\infty} m_{i\,j}^{(k)}$ sont positifs puisque les $m_{i\,j}^{(k)}$ le sont.
- les sommes des lignes de M valent 1 puisque les lignes des M_k valent 1 :

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad m_{i\,1} + m_{i\,2} + \ldots + m_{i\,n} = \lim_{k \to +\infty} \left(m_{i\,1}^{(k)} + m_{i\,2}^{(k)} + \ldots + m_{i\,n}^{(k)} \right) = 1.$$

c) Si la suite $\left(M^k\right)$ converge vers L, la suite $\left(M^{2\,k}\right)$ converge aussi vers L en tant que suite extraite de $\left(M^k\right)$, et elle converge vers L^2 en remarquant que $M^{2\,k} = M^k \times M^k$.
Par unicité de la limite, on a $L^2 = L$ et L est une matrice de projection.

5.d) Il s'agit donc d'établir que la suite $k \longrightarrow C_k$ converge vers $L = \lim M^k$, autrement dit que la suite réelle $\|C_k - L\|_\infty$ converge vers 0. A cet effet, remarquons d'abord que :

$$\|C_k - L\|_\infty = \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{k=0}^n \left(M^k - L \right) \right\|_\infty \le \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left\| M^k - L \right\|_\infty.$$

Par ailleurs, comme $L = \lim M^k$, on a par définition :

$$(\forall\, \varepsilon > 0),\ (\exists\, N \in \mathbb{N}),\ (\forall\, n \in \mathbb{N}) : \quad n \ge N \implies \left\| M^k - L \right\|_\infty \le \varepsilon.$$

Pour $n \ge N$, on a donc :

$$\|C_k - L\|_\infty \le \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left\| M^k - L \right\|_\infty = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N-1} \left\| M^k - L \right\|_\infty + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N}^n \left\| M^k - L \right\|_\infty.$$

La première somme $\sum_{k=0}^{N-1} \left\| M^k - L \right\|_\infty$ est une constante C.
La seconde somme compte moins de $n+1$ termes, tous inférieurs à ε.
On en déduit que :

$$\|C_k - L\|_\infty \le \frac{C}{n+1} + \varepsilon.$$

Le premier terme tend vers 0 et est aussi inférieur à ε pour $n \ge \frac{C}{\varepsilon} - 1$.

Ainsi donc, on a $\|C_k - L\|_\infty \le 2\,\varepsilon$ pour $n \ge \max\left(N, \frac{C}{\varepsilon} - 1\right)$.

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela signifie par définition que $\lim C_k = L$.

6°) *L'espace* $\mathbb{C}^n$ *est somme directe de* $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ *et de* $\mathrm{Im}(M - I_n)$
a) Si M est stochastique, on a $M\ v_1 = v_1$ car la somme des lignes de M vaut 1.

b) Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a compte tenu de la positivité des coefficients $m_{i\,j}$ de M :

$$\forall\ i \in [\![1, n]\!], \qquad \left|\sum_{j=1}^{n} m_{i\,j}\, x_j\right| \ \le\ \sum_{j=1}^{n} m_{i\,j}\, |x_j| \ \le\ \sum_{j=1}^{n} m_{i\,j}\, \|x\|_\infty \ =\ \|x\|_\infty .$$

Cette majoration étant valable pour tout i, on en déduit que $\|Mx\|_\infty \le \|x\|_\infty$.
En particulier, si λ est une valeur propre de M et x un vecteur propre associé (donc non nul), on a $\|Mx\|_\infty = \|\lambda\, x\|_\infty = |\lambda|\ \|x\|_\infty \le \|x\|_\infty$, d'où $|\lambda| \le 1$.

On en déduit que $|\mathrm{Det}(M)| \le 1$ puisque $\mathrm{Det}(M)$ est le produit des n valeurs propres de M, et on a par inégalité triangulaire $|\mathrm{Tr}(M)| \le n$ puisque $\mathrm{Tr}(M)$ est leur somme.
Ajoutons que la matrice I_n est stochastique et réalise les égalités ci-dessus.

c) Si $y = Mx - x \in \mathrm{Im}(M - I_n) \cap \mathrm{Ker}(M - I_n)$, on a $My = y$, et en composant par M :

$$y = Mx - x, \quad y = M^2\, x - Mx, \quad \dots\ , \quad y = M^{k-1}\, x - M^{k-2}\, x, \quad y = M^k\, x - M^{k-1}\, x.$$

Par addition, on obtient $k\ y = M^k\, x - x$, et puisque $M^k \in \mathcal{S}_n$ (qui est stable par produit) :

$$\|y\|_\infty = \frac{1}{k}\ \left\|M^k\, x - x\right\|_\infty \le \frac{1}{k}\left(\left\|M^k\, x\right\|_\infty + \|x\|_\infty\right) \le \frac{2\, \|x\|_\infty}{k}.$$

d) En faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit $y = 0$.
On a donc $\mathrm{Im}(M - I_n) \cap \mathrm{Ker}(M - I_n) = \{0\}$. Ainsi, la somme $\mathrm{Im}(M - I_n) \oplus \mathrm{Ker}(M - I_n)$ est directe, et comme le théorème du rang montre que sa dimension est n, on a établi que $\mathrm{Im}(M - I_n) \oplus \mathrm{Ker}(M - I_n) = \mathbb{C}^n$.

7°) *Etude de la convergence de la suite* $k \longrightarrow C_k$
a) Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, posons $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \mathrm{Ker}(M - I_n)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(M - I_n)$.
On a donc $M\ x_1 = x_1$ et il existe $z \in \mathbb{C}^n$ tel que $x_2 = Mz - z$, ce qui donne :

$$C_k\, x = \frac{1}{k+1}\ \sum_{j=0}^{k} M^j\, x \ =\ x_1 + \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \left(M^{j+1}\, z - M^j\, z\right) \ =\ x_1 + \frac{1}{k+1}\left(M^{k+1}\, z - z\right).$$

Compte tenu de $M^k \in \mathcal{S}_n$ (qui est stable par produit) et de la question 6°, on en déduit :

$$\|C_k\, x - x_1\|_\infty = \frac{1}{k+1}\ \left\|M^{k+1}\, z - z\right\|_\infty \ \le\ \frac{1}{k+1}\left(\left\|M^{k+1}\, z\right\|_\infty + \|z\|_\infty\right) \le \frac{2\, \|z\|_\infty}{k+1}.$$

Comme $x_1 = Px$, on obtient en faisant tendre k vers $+\infty$: $\lim C_k\, x = Px$.

b) Quitte à appliquer ceci aux vecteurs $e_1, \ \dots, e_n$, on observe que $C_k\, e_j$, qui n'est autre que la $j^{\text{ème}}$ colonne de C_k, converge vers Pe_j, qui n'est autre que la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.
Ainsi, chaque élément de C_k a pour limite l'élément correspondant de P, ce qui signifie que la suite (C_k) converge vers P au sens de $\|\,.\,\|_\infty$ (ou de toute autre norme, qui est équivalente puisque l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie).

c) Si la suite $\left(M^k\right)$ converge vers L, on a démontré que (C_k) converge aussi vers L, et comme on vient de voir que (C_k) converge vers P, ceci implique que si $\left(M^k\right)$ converge, c'est vers la matrice de projection P sur $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ dans la direction $\mathrm{Im}(M - I_n)$.

8°) *Etude de la convergence de la suite $k \longrightarrow M^k$*
a) Si $\lambda \neq 1$ est valeur propre de M et si x est vecteur propre associé, on a $Mx = \lambda\, x$.
Donc $(M - I_n)\, x = (\lambda - 1)\, x$, d'où $x = (M - I_n)\, \frac{x}{\lambda - 1} \in \mathrm{Im}(M - I_n)$.
Il en résulte que $\mathrm{Ker}(M - \lambda\, I_n) \subset \mathrm{Im}(M - I_n)$ pour λ valeur propre de M distincte de 1.

b) Par conséquent, la somme directe des sous-espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda \neq 1$ est bien incluse dans $\mathrm{Im}(M - I_n)$.
Et comme M est diagonalisable, la somme directe des sous-espaces propres de M est $\mathbb{C}^n$:

$$\mathrm{Ker}(M - I_n) \oplus \mathrm{Ker}(M - \lambda_2\, I_n) \oplus \ \dots \ \oplus \mathrm{Ker}\left(M - \lambda_p\, I_n\right) = \mathbb{C}^n.$$

On en déduit que $\sum_{i=2}^{p} \dim(\mathrm{Ker}(M - \lambda_i\, I_n) = n - \dim(\mathrm{Ker}(M - I_n)) = \dim(\mathrm{Im}(M - I_n))$.
Et comme la somme directe des sous-espaces propres associées aux valeurs propres autres que 1 est incluse dans $\mathrm{Im}(M - I_n)$, cette égalité des dimensions donne le résultat voulu :

$$\mathrm{Ker}(M - \lambda_2\, I_n) \oplus \ \dots \ \oplus \mathrm{Ker}\left(M - \lambda_p\, I_n\right) = \ \mathrm{Im}(M - I_n).$$

c) Comme M diagonalisable, tout vecteur x peut s'écrire $x = x_1 + x_2 + \ \dots \ + x_p$ où chaque x_i appartient au sous-espace propre $\mathrm{Ker}(M - \lambda_i\, I_n)$ et vérifie donc $M\, x_i = \lambda_i\, x_i$.
Notons que x_1 étant la projection sur $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ dans la direction de la somme des autres sous-espaces propres dont on a vu qu'elle est égale à $\mathrm{Im}(M - I_n)$, c'est la projection sur $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ dans la direction $\mathrm{Im}(M - I_n)$, de sorte qu'on a bien $x_1 = P\, x$.
Par ailleurs, comme on a $M\, x_i = \lambda_i\, x_i$ pour $1 \leq i \leq p$ avec $\lambda_1 = 1$, il est clair que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M^k\, x = x_1 + \lambda_2^k\, x_2 + \ \dots \ + \lambda_p^k\, x_k.$$

On en déduit que $M^k\, x - Px = M^k\, x - x_1 = \lambda_2^k\, x_2 + \ \dots \ + \lambda_p^k\, x_k$.
Par inégalité triangulaire, on a alors :

$$\left\|M^k\, x - Px\right\|_\infty \leq |\lambda_2|^k\, \|x_2\|_\infty + \ \dots \ + \left|\lambda_p\right|^k\, \|x_k\|_\infty.$$

Les valeurs propres $\lambda_2, \ \dots, \lambda_p$ autres que 1 étant ici de module strictement inférieur à 1, cette expression tend bien vers 0 quand k tend vers $+\infty$, ce qui implique $\lim M^k\, x = P\, x$.
Quitte à appliquer ceci aux vecteurs $e_1, \ \dots, e_n$, on observe que $M^k\, e_j$, qui n'est autre que la $j^{\text{ème}}$ colonne de M^k, converge vers Pe_j, qui n'est autre que la $j^{\text{ème}}$ colonne de P.
Ainsi, chaque élément de M^k a pour limite l'élément correspondant de P, ce qui signifie que la suite $\left(M^k\right)$ converge vers P au sens de $\|\ .\ \|_\infty$ (ou de toute autre norme).

d) Comme la suite $k \longrightarrow M^k$ converge dès lors que M est diagonalisable et que 1 est sa seule valeur propre de module 1, considérons la matrice suivante dont les valeurs propres sont ± 1 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice M est clairement stochastique, et on voit que $M^2 = I_2$, donc $M^3 = M$, etc.
On a ainsi $M^{2\,k} = I_2$ et $M^{2\,k+1} = M$ pour tout entier naturel k.
Et comme $M \neq I_2$, il est clair que la suite $\left(M^k\right)$ est alors divergente.
