E.P.I.T.A.

Epreuve optionnelle de mathématiques (2 h)

L'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel noté $\langle\, .\, ,\ .\, \rangle$ et il est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, qui est alors orthonormale directe. On conviendra d'identifier tout vecteur $v = x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3$ de $\mathbb{R}^3$ à la matrice-colonne de ses composantes x, y, z dans la base $\mathcal{B}$, et on donne pour toute la suite :

- un vecteur unitaire $u = p\, e_1 + q\, e_2 + r\, e_3$, de sorte que $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = p^2 + q^2 + r^2 = 1$.
- un nombre réel ω.

On désigne enfin par Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et par I_3 la matrice-identité d'ordre 3.

■ Partie I : Etude de l'endomorphisme $f : v \longrightarrow \omega\, u \wedge v$

On étudie dans cette partie l'endomorphisme f associant à tout vecteur $v = x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3$ de $\mathbb{R}^3$ le produit vectoriel $f(v) = \omega\, u \wedge v$.

1°) *Matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B}$*

a) Donner en fonction de ω, p, q, r et x, y, z les composantes du vecteur $f(v) = \omega\, u \wedge v$.

b) En déduire que la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega\, r & \omega\, q \\ \omega\, r & 0 & -\omega\, p \\ -\omega\, q & \omega\, p & 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Déterminer le polynôme caractéristique de f.

d) Expliciter, si $\omega \neq 0$, la valeur propre réelle de f et le sous-espace propre associé.

2°) *Etude de l'endomorphisme f^2*

On note p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout vecteur v par : $p(v) = v - \langle u, v\rangle\, u$.

a) Calculer $p \circ p(v)$, puis déterminer $p(u)$ et $p(v)$ dans le cas où v est orthogonal à u.
En déduire la nature géométrique de l'endomorphisme p.

b) Ecrire la matrice P de l'endomorphisme p dans la base canonique $\mathcal{B}$.

c) Démontrer que $M^2 = -\omega^2\, P$, puis exprimer $f^2(v)$ en fonction de $p(v)$.
Expliquer comment on obtient géométriquement $f^2(v)$ à partir du vecteur v.

3°) *Calcul des puissances de l'endomorphisme f*

a) Montrer que $M^3 = -\omega^2\, M$, puis exprimer M^4 en fonction de M^2.

b) En déduire M^{2n+1} en fonction de M pour $n \geq 0$ et M^{2n} en fonction de M^2 pour $n \geq 1$.

4°) *Calcul de l'exponentielle* $\exp(f)$ *de l'endomorphisme f*

a) Donner la somme et le rayon de convergence des séries entières suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!}.$$

b) En déduire la somme des séries entières suivantes pour $x \neq 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n)!}.$$

c) En déduire des réels $\alpha(\omega)$ et $\beta(\omega)$ dépendant de ω tels qu'on ait :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^{2n+1}}{(2n+1)!} = \alpha(\omega)\, M \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M^{2n}}{(2n)!} = \beta(\omega)\, M^2.$$

On définit l'exponentielle de l'endomorphisme f et l'exponentielle de sa matrice carrée M (et $\exp(M)$ est alors la matrice de $\exp(f)$ dans la base $\mathcal{B}$) par les formules suivantes :

$$\exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} \quad ; \quad \exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!}.$$

d) Déduire des résultats précédents l'expression de $\exp(M)$ en fonction de ω, I_3, M et M^2 (on pourra vérifier, lorsque $\omega = 0$, qu'on obtient $M = 0$ et $\exp(M) = I_3$), puis en déduire l'expression de $\exp(f)$ en fonction de ω, Id, f et f^2.

■ Partie II : Etude de l'endomorphisme exp(f)

Dans cette partie II, on considère l'endomorphisme g défini par la formule suivante, où f est l'endomorphisme introduit dans la partie I :

$$g = \mathrm{Id} + \frac{\sin(\omega)}{\omega} f + \frac{1-\cos(\omega)}{\omega^2} f^2.$$

5°) *Nature géométrique de l'endomorphisme g*

Puisque le vecteur u est unitaire, il est possible de déterminer des vecteurs u_1 et u_2 tels que la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u)$ forme une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$.

a) Préciser alors $f(u_1)$ et $f(u_2)$, $f^2(u_1)$ et $f^2(u_2)$, $g(u_1)$, $g(u_2)$ et $g(u)$.

b) Ecrire alors la matrice G de l'endomorphisme g dans la base $\mathcal{U}$.
En déduire la nature géométrique de l'endomorphisme g en fonction de ω et u.

c) Inversement, pour toute rotation r de $\mathbb{R}^3$, démontrer qu'il existe un vecteur unitaire u et un nombre réel ω tel que $r = \exp(f)$ où f est l'endomorphisme défini par $f(v) = \omega\, u \wedge v$.

6°) *Une généralisation à l'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$

a) Montrer que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow {}^tM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire et continue.

b) On considère une matrice antisymétrique M, donc une matrice telle que ${}^tM = -M$.
Montrer successivement les deux relations suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad {}^t\!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-M)^k}{k!} \quad ; \quad {}^t(\exp(M)) = \exp(-M).$$

c) On rappelle la propriété suivante : pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$A\,B = B\,A \quad \Longrightarrow \quad \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

En déduire, si la matrice M est antisymétrique, que $\exp(M)$ est orthogonale directe.
En quoi ce résultat généralise-t-il celui obtenu à la question 5.b?