Corrigé de l'épreuve II

Produits vectoriels et rotations dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$

1°) *Matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B}$*

a) On détermine l'image d'un vecteur v par f :

$$f(v) = \omega\, u \wedge v = \omega(p\, e_1 + q\, e_2 + r\, e_3) \wedge (x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3).$$

Compte tenu de $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$, il vient :

$$f(v) = \omega\, u \wedge v = \omega(q\, z - r\, y)\, e_1 + \omega(r\, x - p\, z)\, e_2 + \omega(p\, y - q\, x)\, e_3.$$

b) On en déduit les images des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$ par f et la matrice de f :

$$f(e_1) = \omega\, u \wedge e_1 = \omega(p\, e_1 + q\, e_2 + r\, e_3) \wedge e_1 = \omega(-q\, e_3 + r\, e_2).$$

$$f(e_2) = \omega\, u \wedge e_2 = \omega(p\, e_1 + q\, e_2 + r\, e_3) \wedge e_2 = \omega(+p\, e_3 - r\, e_1).$$

$$f(e_3) = \omega\, u \wedge e_3 = \omega(p\, e_1 + q\, e_2 + r\, e_3) \wedge e_3 = \omega(-p\, e_2 + q\, e_1).$$

La matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ en résulte :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega\, r & \omega\, q \\ \omega\, r & 0 & -\omega\, p \\ -\omega\, q & \omega\, p & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Compte tenu de $p^2 + q^2 + r^2 = 1$, le polynôme caractéristique de f est donc :

$$\det(f - X\,\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} -X & -\omega\, r & \omega\, q \\ \omega\, r & -X & -\omega\, p \\ -\omega\, q & \omega\, p & -X \end{pmatrix} = -X^3 - \omega^2\, X.$$

d) L'unique valeur propre réelle est donc 0, et le sous-espace propre associé est l'ensemble des vecteurs v tels que $\omega\, u \wedge v = 0$, ou $v \in \mathrm{Vect}(u)$: c'est la droite vectorielle dirigée par u.

2°) *Etude de l'endomorphisme f^2*

a) Si $p(v) = v - \langle u, v\rangle\, u$, on a $p \circ p(v) = p(v)$ car :

$$p \circ p(v) = p(v) - \langle u, p(v)\rangle\, u = (v - \langle u, v\rangle\, u) - \langle u, v - \langle u, v\rangle\, u\rangle\, u = p(v).$$

En effet, on a par bilinéarité de $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ et compte tenu de $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = 1$:

$$\langle u, p(v)\rangle = \langle u, v - \langle u, v\rangle\, u\rangle\, u = \langle u, v\rangle\, u - \langle u, v\rangle\, \langle u, u\rangle\, u = 0.$$

On a par ailleurs :

- $p(u) = u - \langle u, u\rangle\, u = u - u = 0$ puisque u étant unitaire, on a $\langle u, u\rangle = 1$.
- $p(v) = v - \langle u, v\rangle\, u = v$ si le vecteur v est supposé orthogonal à u.

Ainsi, p est la projection orthogonale sur le plan orthogonal à u, dont une équation est :

$$\langle u, v\rangle = p\, x + q\, y + r\, z = 0.$$

b) La matrice P de l'endomorphisme p dans la base canonique $\mathcal{B}$ s'obtient en calculant :

$$p(e_1) = e_1 - \langle u, e_1\rangle\, u = e_1 - p\, u = e_1 - p(p\, e_1 + q\, e_2 + r\, e_3).$$

$$p(e_2) = e_2 - \langle u, e_2\rangle\, u = e_2 - q\, u = e_2 - q(p\, e_1 + q\, e_2 + r\, e_3).$$

$$p(e_3) = e_3 - \langle u, e_3\rangle\, u = e_3 - r\, u = e_3 - r(p\, e_1 + q\, e_2 + r\, e_3).$$

On en déduit immédiatement que :

$$P = \begin{pmatrix} 1-p^2 & -q\,p & -r\,p \\ -p\,q & 1-q^2 & -r\,q \\ -p\,r & -q\,r & 1-r^2 \end{pmatrix}.$$

c) Par ailleurs, un calcul matriciel facile donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega\,r & \omega\,q \\ \omega\,r & 0 & -\omega\,p \\ -\omega\,q & \omega\,p & 0 \end{pmatrix}^2 = \omega^2 \begin{pmatrix} -q^2-r^2 & q\,p & r\,p \\ p\,q & -r^2-p^2 & r\,q \\ p\,r & q\,r & -q^2-p^2 \end{pmatrix}.$$

Compte tenu de $p^2+q^2+r^2=1$, on a donc :

$$M^2 = \omega^2 \begin{pmatrix} p^2-1 & q\,p & r\,p \\ p\,q & q^2-1 & r\,q \\ p\,r & q\,r & r^2-1 \end{pmatrix} = -\omega^2\,P.$$

On a donc aussi $f^2 = -\omega^2\,p$, de sorte que $f^2(v) = -\omega^2(v - \langle u,\, v\rangle\, u)$.
Ainsi, f^2 est la composée commutative de l'homothétie de rapport $-\omega^2$ et de la projection orthogonale p sur le plan orthogonal au vecteur u.

3°) *Calcul des puissances de l'endomorphisme f*
a) Un calcul matriciel simple donne, compte tenu de $p^2+q^2+r^2=1$:

$$M^3 = \omega^3 \begin{pmatrix} -q^2-r^2 & q\,p & r\,p \\ p\,q & -r^2-p^2 & r\,q \\ p\,r & q\,r & -q^2-p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} = -\omega^3 \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte comme annoncé que $M^3 = -\omega^2\,M$.
Notons que le théorème de Cayley-Hamilton, suivant lequel le polynôme caractéristique d'un endomorphisme annule celui-ci et sa matrice, redonne aussitôt ce résultat.
Enfin, en multipliant par M, on obtient alors $M^4 = -\omega^2\,M^2$.

b) Comme $M^3 = -\omega^2\,M$, on a $M^5 = -\omega^2\,M^3 = \omega^4\,M$, $M^7 = -\omega^2\,M^5 = -\omega^6\,M$, etc.
Par récurrence simple, il en résulte qu'on a $M^{2n+1} = \left(-\omega^2\right)^n M$ pour $n \in \mathbb{N}$.
On en tire $M^{2n+2} = \left(-\omega^2\right)^n M^2$ pour $n \in \mathbb{N}$, et donc $M^{2n} = \left(-\omega^2\right)^{n-1} M^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4°) *Calcul de l'exponentielle* $\exp(f)$ *de l'endomorphisme f*
a) On reconnaît facilement les séries entières du sinus et du cosinus dont le rayon est $+\infty$:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2n}}{(2n)!}.$$

b) On obtient pour $x \neq 0$ le résultat suivant à l'aide de cette dernière série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,x^{2n-2}}{(2n)!} = -\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2n}}{(2n)!} = -\frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2n}}{(2n)!} - 1\right) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$

c) Compte tenu des résultats de la question 3°, il vient alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\omega^{2n}}{(2n+1)!} M = \frac{\sin(\omega)}{\omega} M.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,\omega^{2n-2}}{(2n)!} = \frac{1-\cos(\omega)}{\omega^2} M^2.$$

d) Les résultats obtenus précédemment donnent ici (en séparant dans la série exponentielle le terme $n = 0$, les termes impairs $2n+1$ pour $n \geq 0$ et les termes pairs $2n$ pour $n \geq 1$) :

$$\exp(M) = I_3 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M^{2n}}{(2n)!} = I_3 + \frac{\sin(\omega)}{\omega} M + \frac{1-\cos(\omega)}{\omega^2} M^2.$$

Comme M est la matrice de f dans la base canonique, on a de façon équivalente :

$$\exp(f) = \mathrm{Id} + \frac{\sin(\omega)}{\omega} f + \frac{1-\cos(\omega)}{\omega^2} f^2.$$

5°) *Nature géométrique de l'endomorphisme g*

a) Puisque $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u)$ forme une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$f(u_1) = \omega\, u \wedge u_1 = \omega\, u_2 \quad ; \quad f(u_2) = \omega\, u \wedge u_2 = -\omega\, u_1.$$

$$f^2(u_1) = \omega\, f(u_2) = -\omega^2\, u_1 \quad ; \quad f^2(u_2) = -\omega\, f(u_1) = -\omega^2\, u_2.$$

D'après la définition de $g = \exp(f)$, il en résulte que :

$$g(u_1) = u_1 + \sin(\omega)\, u_2 - (1-\cos(\omega))\, u_1 = \cos(\omega)\, u_1 + \sin(\omega)\, u_2.$$

$$g(u_2) = u_2 - \sin(\omega)\, u_1 - (1-\cos(\omega))\, u_2 = -\sin(\omega)\, u_1 + \cos(\omega)\, u_2.$$

Enfin, comme $f(u) = 0$, on a $g(u) = u$.

b) On a donc les images par g des vecteurs de la base orthonormale directe $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u)$. La matrice G de l'endomorphisme g dans la base $\mathcal{U}$ est donc :

$$G = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) & 0 \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $g = \exp(f)$ est la matrice de la rotation de mesure ω autour de l'axe dirigé par u.

c) Inversement, soit r la rotation la plus générale (distincte de Id) de mesure (non nulle) ω autour d'un axe dirigé par un vecteur unitaire u. D'après ce qui précède, on a $r = \exp(f)$ avec $f(v) = \omega\, u \wedge v$, et ceci reste valable si r est la rotation identité avec $\omega = 0$.

6°) *Une généralisation à l'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$

a) L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow {}^tM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est clairement linéaire.
Elle est donc continue puisque toute application linéaire sur un espace de dimension finie (qui est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans notre cas) est continue.

b) Si M est antisymétrique, on a ${}^tM = -M$ et on a pour tout entier naturel n :

$$ {}^t\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left({}^tM\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-M)^k}{k!}. $$

Par continuité de l'application $M \longrightarrow {}^tM$, on obtient quand n tend vers $+\infty$:

$$ \lim_{n \longrightarrow +\infty} {}^t\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}\right) = {}^t\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}\right) = {}^t(\exp(M)). $$

Par ailleurs, on a également :

$$ \lim_{n \longrightarrow +\infty} {}^t\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-M)^k}{k!} = \exp(-M). $$

L'unicité de la limite donne bien ${}^t(\exp(M)) = \exp(-M)$.

c) Il en résulte que ${}^t(\exp(M))\exp(M) = \exp(-M)\exp(M) = \exp(M - M) = \exp(0) = I_n$.
Donc $\exp(M)$ est une matrice orthogonale, et elle est directe car, puisque $M/2$ commute avec elle-même, on a $\exp(M) = \exp\left(\frac{M}{2} + \frac{M}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{M}{2}\right)\right)^2$, donc :

$$ \det(\exp(M)) = \left(\det\left(\exp\left(\frac{M}{2}\right)\right)\right)^2 \geq 0. $$

Ceci généralise bien à la dimension n les résultats des questions précédentes, où on a établi que l'exponentielle d'une matrice antisymétrique d'ordre 3 (c'est à dire une matrice du type de la matrice M) était une matrice de rotation, c'est à dire une matrice orthogonale directe.
