

Corrigé de l'épreuve I

A propos de l'équation fonctionnelle $f(x) = f(g(x))$

1°) *Etude du cas particulier* $|a| = 1$

a) On suppose que $a = 1$, donc $b \neq 0$.

Les fonctions $c : x \rightarrow \cos(\omega x)$ et $s : x \rightarrow \sin(\omega x)$ appartiennent à $\mathcal{E}(1, b)$ si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\omega x) = \cos(\omega(x+b)) = \cos(\omega x + \omega b).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\omega x) = \sin(\omega(x+b)) = \sin(\omega x + \omega b).$$

Ceci est réalisé si et seulement si $\omega b \in 2\pi\mathbb{Z}$, soit : il existe un entier k tel que $\omega = \frac{2k\pi}{b}$.

Plus généralement, les fonctions continues vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+b)$ avec $b \neq 0$ sont les fonctions continues b -périodiques.

b) Les fonctions continues vérifiant $\forall x, f(x) = f(-x)$ sont les fonctions continues paires. Plus généralement, quitte à poser $x = t + b/2$ ou $t = x - b/2$, il y a équivalence entre :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x+b) \quad ; \quad (2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{b}{2} + x\right) = f\left(\frac{b}{2} - x\right).$$

Ainsi, les fonctions continues vérifiant $\forall x, f(x) = f(-x+b)$ sont les fonctions continues ayant la droite d'équation $x = b/2$ pour axe de symétrie, ou encore les fonctions continues telles que $x \rightarrow f(b/2 + x)$ soit paire.

2°) *Etude du cas* $|a| < 1$

a) Si la suite de premier terme $x_0 = x$ définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = ax_n + b$ converge, alors sa limite vérifie $L = aL + b$, soit $L = b/(1-a)$.

b) Par différence avec $L = aL + b$, la relation $x_{n+1} = ax_n + b$ équivaut à :

$$x_{n+1} - L = a(x_n - L).$$

La suite $n \rightarrow x_n - L$ est donc géométrique de raison a , et on a $x_n - L = a^n(x_0 - L)$.

Comme $|a| < 1$, on en déduit que la suite $n \rightarrow x_n - L$ converge vers 0 et $\lim x_n = L$.

c) Si f appartient à $\mathcal{E}(g_{a,b})$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(ax+b)$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = f(x_{n+1})$.

La suite $(f(x_n))$ est donc une suite constante, égale à $f(x_0) = f(x)$, et comme f est continue, elle converge également vers $f(L)$, d'où, par unicité de la limite : $f(x) = f(L)$.

d) Si $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$ avec $|a| < 1$, ce qui précède montre que f est constante.

Inversement, les fonctions constantes sont continues et vérifient $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(ax+b)$.

3°) *Etude du cas* $|a| > 1$

a) Quitte à poser $t = ax + b$ ou $x = \frac{t}{a} - \frac{b}{a}$ (car $a \neq 0$), on voit qu'il y a équivalence entre :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(ax+b) \quad ; \quad (2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right).$$

Autrement dit, les ensembles $\mathcal{E}(g_{a,b})$ et $\mathcal{E}(g_{1/a, b/a})$ sont égaux.

b) Si $|a| > 1$, alors $|1/a| < 1$ et d'après le résultat de la question 2, l'ensemble $\mathcal{E}(g_{1/a, -b/a})$ des fonctions continues vérifiant $\forall t, f(t) = f\left(\frac{t}{a} - \frac{b}{a}\right)$ se réduit aux fonctions constantes. L'ensemble $\mathcal{E}(g_{a,b})$ des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant la relation équivalente $\forall x, f(x) = f(ax + b)$ est donc également l'ensemble des fonctions constantes.

4°) *Etude des points fixes de la fonction g lorsque $|g'| \leq K < 1$*

a) D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout réel x , sachant que $|g'| \leq K$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |g(x) - g(0)| \leq K|x|.$$

Ce qui s'écrit encore $-K|x| \leq g(x) - g(0) \leq K|x|$, et donne finalement :

$$g(0) - K|x| \leq g(x) \leq g(0) + K|x|.$$

b) D'après l'inégalité précédente, on a pour $x \geq 0$:

$$g(x) - x \leq g(0) + (K - 1)x.$$

Comme $K - 1 < 0$, on en déduit que la limite de $g(x) - x$ en $+\infty$ est $-\infty$.

De même, l'inégalité précédente donne pour $x \leq 0$:

$$g(0) + (K - 1)x \leq g(x) - x.$$

Comme $K - 1 < 0$, on en déduit que la limite de $g(x) - x$ en $-\infty$ est $+\infty$.

c) La fonction $x \rightarrow y = g(x) - x$ est continue sur \mathbb{R} et varie de $+\infty$ à $-\infty$ d'après ci-dessus. Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} , et comme sa dérivée vérifie $y' = g'(x) - 1 \leq K - 1 < 0$, elle est strictement décroissante et s'annule au plus une fois sur \mathbb{R} , d'où l'existence et l'unicité du point fixe L .

5°) *Etude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \leq K < 1$*

a) On exploite à nouveau l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - L| = |g(x_n) - g(L)| \leq K|x_n - L|.$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - L| \leq K^n |x - L|.$$

Comme $0 \leq K < 1$, on en déduit que la suite (x_n) converge vers L .

b) Si f appartient à $\mathcal{E}(g)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(g(x)) = f(x)$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) = f(x_n)$.

La suite $(f(x_n))$ est donc une suite constante, égale à $f(x_0) = f(x)$, et comme f est continue, elle converge également vers $f(L)$, d'où, par unicité de la limite : $f(x) = f(L)$.

c) D'après ce qui précède, une fonction f appartenant à $\mathcal{E}(g)$ est nécessairement constante, et réciproquement, les fonctions constantes sont continues et vérifient $\forall x, f(g(x)) = f(x)$. Ainsi, $\mathcal{E}(g)$ est dans ce cas l'ensemble des fonctions constantes.

6°) *Recherche de fonctions vérifiant l'hypothèse (H)*

a) Considérons pour $r \geq 0$ la série de fonctions proposée en la variable réelle t :

$$S(r e^{it}) e^{-int} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{(k-n)it}.$$

On observe, pour tout réel $t \in [0, 2\pi]$, que $|a_k r^k e^{(k-n)it}| = |a_k r^k| = |a_k| r^k$.

Et la série $\sum |a_k| r^k$ converge car on sait qu'une série entière est absolument convergente en tout point r appartenant à son disque de convergence (qui est ici \mathbb{C} tout entier).

Par conséquent, la série de fonctions proposée converge normalement (et uniformément) sur le segment $[0, 2\pi]$ (et même sur \mathbb{R}).

b) Si $k = n$, on a $\int_0^{2\pi} e^{(k-n)it} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$, et sinon :

$$\int_0^{2\pi} e^{(k-n)it} dt = \left[\frac{e^{(k-n)it}}{(k-n)i} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

c) On sait qu'on peut permuter les symboles $\sum_{k=0}^{+\infty}$ et $\int_0^{2\pi}$ lorsqu'on a une série de fonctions continues normalement (ou uniformément) convergente sur un segment, de sorte qu'on a :

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} S(re^{it}) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{(k-n)it} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{(k-n)it} dt = 2\pi a_n r^n.$$

d) Si S est bornée sur \mathbb{C} par un réel $K \leq 1$, on a maintenant pour tout réel positif r :

$$2\pi |a_n| r^n = \left| \int_0^{2\pi} e^{-int} S(re^{it}) dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |e^{-int} S(re^{it})| dt \leq 2\pi K.$$

On en déduit donc $|a_n| \leq K/r^n$ après division par r^n , puis en faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $a_n = 0$ pour $n \geq 1$, et donc $S = a_0$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = a_0$ avec $|a_0| \leq K < 1$. Finalement, on retrouve les fonctions $g(x) = a_0 x + b$ de la partie I avec $|a_0| < 1$.

7°) Etude de l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ lorsque $|g'| \geq k > 1$

a) La fonction g' ne change pas de signe sur \mathbb{R} , car dans le cas contraire, elle s'annulerait d'après le théorème des valeurs intermédiaires, et c'est impossible puisque $|g'(x)| \geq K > 1$. Comme $|g'(x)| \geq K$, on a $g'(x) \geq +K$ ou $g'(x) \leq -K$ pour tout réel x . Et on a en fait :

- ou bien $g'(x) \geq +K$ pour tout réel x .

- ou bien $g'(x) \leq -K$ pour tout réel x .

Dans tout autre cas, g' changerait en effet de signe sur \mathbb{R} , ce qui est impossible.

- Si $g'(x) \geq +K$ pour tout réel x , on a pour tout réel $x \geq 0$:

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t) dt \geq Kx.$$

On a donc $g(x) \geq g(0) + Kx$ et $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

De même, on a pour tout réel $x \geq 0$:

$$\forall x \geq 0, \quad g(0) - g(-x) = \int_{-x}^0 g'(t) dt \geq Kx.$$

On a donc $g(-x) \leq g(0) - Kx$ et $g(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

Ainsi, dans ce cas, g est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque x décrit \mathbb{R} .

- Si $g'(x) \leq -K$ pour tout réel x , on a $-g'(x) \geq K$ et on applique ce qui précède à $-g$.

Il en résulte que g est strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$ lorsque x décrit \mathbb{R} .

b) D'après la question précédente, la fonction g est continue et strictement monotone de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et elle a une réciproque également continue et strictement monotone de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Comme de plus elle est de classe C^1 et que sa dérivée ne s'annule pas car $|g'(x)| \geq K > 1$, on en déduit que g^{-1} est aussi de classe C^1 et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |(g^{-1})'(x)| = \left| \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} \right| \leq \frac{1}{K} < 1.$$

c) Il est clair que la relation $\forall x \in \mathbb{R}, f(g(x)) = f(x)$ équivaut à $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(g^{-1}(x))$. Autrement dit, $f \in \mathcal{E}(g)$ si et seulement si $f \in \mathcal{E}(g^{-1})$.

Or on vient d'établir que g^{-1} est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que sa dérivée est bornée par $\frac{1}{K} < 1$. Les résultats du 5° démontrent alors que l'ensemble $\mathcal{E}(g^{-1})$, et donc l'ensemble $\mathcal{E}(g)$, sont l'ensemble des fonctions constantes.

8°) Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(x^2)$

a) Comme $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$, un raisonnement par récurrence simple donne $x_n = x^{1/2^n}$.

Il en résulte que $\lim x_n = \lim \exp\left(\frac{1}{2^n} \ln(x)\right) = 1$ pour tout réel $x > 0$.

b) Comme $f(x) = f(x^2)$, on a $f(\sqrt{x}) = f(x)$ pour tout réel positif x .

Il en résulte que $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout entier naturel n .

La suite $(f(x_n))$ est donc constante et égale à $f(x_0) = f(x)$, et elle converge vers $f(1)$.

Par unicité de la limite, on a donc $f(x) = f(1)$ pour tout $x > 0$, et par continuité pour $x \geq 0$.

Enfin, si $x \leq 0$, on a $f(x) = f(x^2) = f(1)$ puisque $x^2 \geq 0$.

Finalement, on voit que f est nécessairement constante, et réciproquement, toute fonction constante est continue et vérifie $f(x) = f(x^2)$ pour tout nombre réel x .

c) On a ainsi un nouveau cas où les éléments de $\mathcal{E}(g)$ sont les seules fonctions constantes, et comme $g'(x) = 2x$ puisque $g(x) = x^2$, on voit que g ne vérifie aucune des hypothèses (\mathcal{H}) ou (\mathcal{H}') des questions 5 et 7 : ces hypothèses sont suffisantes, mais pas nécessaires pour que l'ensemble $\mathcal{E}(g)$ se réduise aux fonctions constantes.

9°) Recherche des fonctions continues telles que $f(x) = f(e^x)$

a) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, on a $f(x) = f(e^x)$ pour tout réel x , et donc $f(0) = f(1)$ pour $x = 0$.

b) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, on a $f(x) = f(e^x)$ pour tout réel x , et si $x < 0$, alors $e^x \in [0, 1]$.

La donnée de f sur $[0, 1]$ détermine donc f sur \mathbb{R}_- .

c) On connaît (ou on vérifie) l'inégalité de convexité $e^x \geq x + 1$.

Comme $x_{n+1} = e^{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{n+1} \geq x_n + 1$, et (x_n) est strictement croissante.

Comme $x_0 = 0$, on obtient par récurrence facile que $x_n \geq n$, et (x_n) diverge vers $+\infty$.

• Comme la fonction exponentielle est continue et strictement croissante, elle induit donc une bijection de $]x_n, x_{n+1}]$ sur son image $]e^{x_n}, e^{x_{n+1}}] =]x_{n+1}, x_{n+2}]$.

Le logarithme induit sa réciproque de $]x_{n+1}, x_{n+2}] =]e^{x_n}, e^{x_{n+1}}]$ sur $]x_n, x_{n+1}]$.

• Comme $f(x) = f(e^x)$, on a $f(\ln(x)) = f(x)$ et si $x \in]x_{n+1}, x_{n+2}]$, alors $\ln(x) \in]x_n, x_{n+1}]$, et la donnée de f sur $]x_n, x_{n+1}]$ détermine donc f sur $]x_{n+1}, x_{n+2}]$.

De proche en proche, la donnée de f sur $[0, 1]$ détermine ainsi f sur $]x_1, x_2]$, sur $]x_2, x_3]$, ... , sur $]x_n, x_{n+1}]$, ... , et finalement sur leur réunion \mathbb{R}_+ .

d) Si $f \in \mathcal{E}(\exp)$, sa restriction à $[0, 1]$ est une fonction continue φ vérifiant $\varphi(0) = \varphi(1)$.

Inversement, si φ désigne une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} vérifiant $\varphi(0) = \varphi(1)$, et s'il existe $f \in \mathcal{E}(\exp)$ coïncidant avec φ sur $[0, 1]$, on a nécessairement :

• $\forall x < 0, f(x) = f(e^x) = \varphi(e^x)$ où $e^x \in [0, 1]$.

Ainsi prolongée, f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $[0, 1]$, et aussi en 0 puisque :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(e^x) = \varphi(1) = \varphi(0) = f(0).$$

On a ainsi obtenu f continue sur $]-\infty, x_1]$ et vérifiant $f(e^x) = f(x)$ pour $x \leq 0$.

(La relation $f(x) = f(e^x)$ est en effet vérifiée si $x < 0$ et reste vraie en 0 car $f(0) = f(1)$).

• $\forall x \in]x_1, x_2], f(x) = f(\ln(x)) = \varphi(\ln(x))$ où $\ln(x) \in]0, 1]$.

Ainsi prolongée, f est continue sur $]-\infty, 1]$ et $]1, x_2]$, et aussi en $x_1 = 1$ puisque :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(\ln(x)) = \varphi(0) = \varphi(1) = f(1).$$

On a ainsi obtenu f continue sur $]-\infty, x_2]$ et vérifiant $f(e^x) = f(x)$ pour $x \leq x_1$.

• Supposons avoir obtenu f continue sur $]-\infty, x_n]$ et vérifiant $f(x) = f(e^x)$ pour $x \leq x_{n-1}$.

Poursuivons alors la construction par récurrence :

• $\forall x \in]x_n, x_{n+1}], f(x) = f(\ln(x)) = \varphi(\ln(x))$ où $\ln(x) \in]x_{n-1}, x_n]$.

Ainsi prolongée, f est continue sur $]-\infty, x_n]$ et $]x_n, x_{n+1}]$, et aussi en x_n puisque :

$$\lim_{x \rightarrow x_n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_n^+} f(\ln(x)) = f(x_{n-1}) = f(e^{x_{n-1}}) = f(x_n).$$

On a ainsi obtenu f continue sur $]-\infty, x_{n+1}]$ et vérifiant $f(e^x) = f(x)$ pour $x \leq x_n$.

A partir de la donnée de $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et vérifiant $\varphi(0) = \varphi(1)$, on obtient ainsi par récurrence une fonction continue f et une seule vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(e^x)$.

On en déduit ainsi la méthode d'obtention de toutes les fonctions appartenant à $\mathcal{E}(\exp)$.
