Corrigé de l'épreuve II

Etude des classes de similitude dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1°) *Premières propriétés de* $C(A)$

a) Supposons que $C(M) = C(A)$.

Alors M appartient à $C(M)$ puisqu'on a $M = I_n^{-1}\, M\, I_n$, et donc M appartient à $C(A)$.

Supposons inversement que $M \in C(A)$. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = P^{-1}\, A\, P$ et :

- on a $C(M) \subset C(A)$ car une matrice de $C(M)$ s'écrit $Q^{-1}\, M\, Q$, donc $Q^{-1}\, P^{-1}\, A\, P\, Q$. Elle appartient donc à $C(A)$ puisque $P\,Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- on a $C(A) \subset C(M)$ car une matrice de $C(A)$ s'écrit $Q^{-1}\, A\, Q$, donc $Q^{-1}\, P\, M\, P^{-1}\, Q$. Elle appartient donc à $C(A)$ puisque $P^{-1}\, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Ainsi donc, si $M \in C(A)$, on a $C(M) = C(A)$.

b) Si $A = \lambda\, I_n$, alors $C(A) = \left\{ P^{-1}\, A\, P \;/\; P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \right\} = \{\lambda\, I_n\} = \{A\}$.

c) Inversement, si $C(A) = \left\{ P^{-1}\, A\, P \;/\; P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \right\} = \{A\}$, on a $A\,P = P\,A$ pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
En particulier, on a $A\left(I_n + E_{i,j}\right) = \left(I_n + E_{i,j}\right) A$ pour $1 \leq i,\ j \leq n$ car $I_n + E_{i,j}$ est inversible, et cette égalité équivaut à $A\, E_{i,j} = E_{i,j}\, A$, soit :

$$\left(\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a_{p,q}\, E_{p,q} \right) E_{i,j} = E_{i,j} \left(\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a_{p,q}\, E_{p,q} \right) \iff \sum_{p=1}^{n} a_{p,i}\, E_{p,j} = \sum_{q=1}^{n} a_{j,q}\, E_{i,q}.$$

La matrice au premier membre a ses éléments non nuls sur sa $j^{\text{ème}}$ colonne : $a_{,i},\ \ldots,\ a_{n,i}$.
La matrice au second membre a ses éléments non nuls sur sa $i^{\text{ème}}$ ligne : $a_{j,1},\ \ldots,\ a_{j,n}$.
L'élément en position $(i,\ j)$ est $a_{i,i}$ pour la première matrice, $a_{j,j}$ pour la seconde matrice.
L'égalité de ces deux matrices donne : $\forall\ k \neq i,\ a_{k,i} = 0,\ \forall\ k \neq j,\ a_{j,k} = 0$ et $a_{i,i} = a_{j,j}$.
Et comme i et j sont deux entiers distincts quelconques entre 1 et n, on en déduit que tous les éléments de A sont nuls, sauf ceux de la diagonale qui sont tous égaux entre eux.
Il en résulte réciproquement que si $C(A) = \{A\}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda\, I_n$.

2°) *Quelques propriétés communes aux matrices de la classe de similitude* $C(A)$

a) Pour $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\mathrm{Tr}(A\,B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i} \quad ; \quad \mathrm{Tr}(B\,A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, a_{k,i}.$$

Quitte à permuter les indices muets i et k dans la seconde somme, on a $\mathrm{Tr}(A\,B) = \mathrm{Tr}(B\,A)$.
On en déduit que si $M \in C(A)$, donc si $M = P^{-1}\, A\, P$, alors $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(A)$ puisqu'on a :

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}\, A\, P\right) = \mathrm{Tr}\left(A\, P\, P^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(A).$$

b) Pour $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a de même $\mathrm{Det}(A\,B) = \mathrm{Det}(B\,A)$.
On en déduit que si $M \in C(A)$, donc si $M = P^{-1}\,A\,P$, alors DetM) = $\mathrm{Det}(A)$ puisqu'on a :

$$\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}\left(P^{-1}\,A\,P\right) = \mathrm{Det}\left(P^{-1}\right)\mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(P) = \mathrm{Det}(A).$$

(On a en effet $P^{-1}\,P = I_n$, d'où $\mathrm{Det}\left(P^{-1}\right)\mathrm{Det}(P) = \mathrm{Det}(I_n) = 1$, et $\mathrm{Det}\left(P^{-1}\right) = 1/\mathrm{Det}(P)$).
De plus, si $M \in C(A)$, on a $M = P^{-1}\,A\,P$, donc $M - z\,I_n = P^{-1}(A - z\,I_n)\,P$, d'où :

$$\mathrm{Det}(M - z\,I_n) = \mathrm{Det}(A - z\,I_n).$$

Ainsi, les matrices M de $C(A)$ ont même polynôme caractéristique que A, et elles ont donc mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité que A.

3°) *Matrices triangulaires ou diagonales de la classe de similitude* $C(A)$
a) D'après un théorème du cours, on sait qu'une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$ considéré, et comme ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cette condition est vérifiée, de sorte que A est trigonalisable : il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}\,A\,P$ soit triangulaire, et on a alors $C(A) = C(T)$ d'après 1°.
Comme $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ sont les n valeurs propres distinctes ou non de A, donc aussi de T, elles figurent sur la diagonale de T et on obtient bien :

$$T = P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

b) Exploitons les résultats de la question 1° :
- si A est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1}\,A\,P$ soit diagonale, et on a alors $C(A) = C(D)$.
- s'il existe D diagonale telle que $C(A) = C(D)$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1}\,A\,P$ et A est donc diagonalisable.

Naturellement, les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de D, et donc de A, c'est à dire $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$.

c) Considérons les trois matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A_1 a les deux valeurs propres $a \pm b$.
   Comme $b \neq 0$, elles sont distinctes et A_1 est diagonalisable.
2. La matrice A_2 a les deux valeurs propres distinctes a et b, elle est donc diagonalisable.
3. la matrice A_3 a la valeur propre double a, et si A_3 était diagonalisable, alors elle serait semblable à $a\,I_2$, donc égale à $a\,I_2$, ce qui est faux puisque $b \neq 0$, donc $A_3 \neq a\,I_2$.

Ainsi, seules A_1 et A_2 sont diagonalisables, et sont semblables respectivement à :

$$D_1 = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \quad ; \quad D_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

4°) *Une condition pour que* $C(A)$ *soit bornée lorsque* $n = 2$

a) La matrice de passage P_k de la base (e_1, e_2) à la base $\left(\frac{1}{k}\, e_1, e_2\right)$ est :

$$P_k = \begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_k^{-1} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_k^{-1}\, T\, P_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & k\,t \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

b) On note, si $t \neq 0$, que le module du coefficient $k\,t$ de la matrice tend vers $+\infty$ quand l'entier k tend vers $+\infty$. Ceci n'est pas possible si $C(A)$ est bornée car les quatre modules des coefficients d'une matrice de $C(A)$ sont alors bornés.
Si $C(A)$ est bornée, il faut donc que $t = 0$ et que T soit diagonale.

c) La matrice de passage P_k de la base (e_1, e_2) à la base $\left(e_1 + e_2, \frac{1}{k}\, e_2\right)$ est :

$$Q_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/k \end{pmatrix}, \quad Q_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & k \end{pmatrix}, \quad Q_k^{-1}\, T\, Q_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ k(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

d) On note, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, que le module du coefficient $k(\lambda_2 - \lambda_1)$ de la matrice tend vers $+\infty$ quand l'entier k tend vers $+\infty$. Ceci n'est pas possible si $C(A)$ est bornée car les modules des quatre coefficients d'une matrice de $C(A)$ sont alors bornés.
Si $C(A)$ est bornée, il faut donc que T soit diagonale et qu'on ait $\lambda_1 = \lambda_2$.
Ce qui implique $T = \lambda\, I_2$, donc $A = P\,T\,P^{-1} = \lambda\, I_2$.
Inversement, si $A = \lambda\, I_2$, alors $C(A) = \{A\}$ est bien bornée.

5°) *Une condition pour que* $C(A)$ *soit bornée dans le cas général*

a) La matrice de passage P_k de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_k$ est :

$$P_k = \mathrm{Diag}\left(1, \ \dots, \ 1, \ \frac{1}{k}, \ 1, \ \dots, \ 1\right), \quad P_k^{-1} = \mathrm{Diag}(1, \ \dots, \ 1, k, 1, \ \dots, \ 1).$$

On en déduit le produit $P_k^{-1}\, T\, P_k$:

- dans le produit $P_k^{-1}\, T$, la $i^{\text{ème}}$ligne est divisée par k.
- dans le produit $P_k^{-1}\, T\, P_k$, la $i^{\text{ème}}$colonne est multipliée par k.

$$P_k^{-1}\, T\, P_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1,i}/k & t_{1,i+1} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_{i-1} & t_{i-1,i}/k & t_{i-1,i+1} & \cdots & t_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & k\,t_{i,i+1} & \cdots & k\,t_{i,n} \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_{i+1} & & t_{i+1,n} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

b) On note, si l'un des $t_{i,j}$ (avec $i < j$) est non nul, que le module du coefficient $k\,t_{i,j}$ tend vers $+\infty$ quand l'entier k tend vers $+\infty$. Ceci n'est pas possible si $C(A)$ est bornée car tous les modules des coefficients d'une matrice de $C(A)$ sont alors bornés.
Si $C(A)$ est bornée, il faut donc que les $t_{i,j}$ $(i < j)$ soient nuls et que T soit diagonale.

c) La matrice de passage Q_k de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_k$ est :

$$Q_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & 1/k & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & -k & \cdots & k & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit le produit $Q_k^{-1}\, T\, Q_k$ lorsque T est diagonale :

$$Q_k^{-1}\, T\, Q_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_i & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k(\lambda_j - \lambda_i) & \cdots & \lambda_j & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

d) On note, si $\lambda_i \neq \lambda_j$, que le module du coefficient $k(\lambda_j - \lambda_i)$ de la matrice tend vers $+\infty$ quand l'entier k tend vers $+\infty$. Ceci n'est pas possible si $C(A)$ est bornée car les modules des coefficients d'une matrice de $C(A)$ sont alors bornés.
Si $C(A)$ est bornée, il faut donc que T soit diagonale et qu'on ait $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$.
Ce qui implique $T = \lambda\, I_n$, donc $A = P\, T\, P^{-1} = \lambda\, I_n$.
Inversement, si $A = \lambda\, I_n$, alors $C(A) = \{A\}$ est bien bornée.

e) Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie, ses parties compactes sont ses parties fermées bornées, ce qui implique que si la classe $C(A)$ est compacte, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda\, I_n$ et $C(A) = \{A\}$. Comme la partie à un élément $C(A) = \{A\}$ est bien fermée et bornée, elle est compacte, ce qui prouve que $C(A)$ est compacte si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda\, I_n$ et $C(A) = \{A\}$.