E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

Dans ce problème, on considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'(t) - a\,y(t) = f(t)$$

où a désigne un complexe non nul et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On se propose d'étudier certaines propriétés de ses solutions y (qui sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) en fonction des propriétés de a et f. Dans toute la suite, on convient de poser :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = e^{a\,t} \int_0^t e^{-a\,u} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

1°) *Forme générale des solutions de (E)*

a) Montrer que l'équation (E) équivaut à :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-a\,t}\,y(t)\right) = e^{-a\,t} f(t).$$

b) En déduire alors :

- les solutions y de l'équation homogène (E_0) : $y'(t) - a\,y(t) = 0$.
- les solutions y de l'équation complète (E) : $y'(t) - a\,y(t) = f(t)$ à l'aide de la fonction F.

c) Etant donné un complexe y_0, en déduire qu'il existe une et une seule solution y de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$ et préciser celle-ci en fonction de y_0 et de F.

■ Partie I : Etude des solutions périodiques

2°) *Etude de deux exemples*

a) Montrer que si l'équation (E) a une solution 2π-périodique y, alors y' est 2π-périodique.
En déduire que f est nécessairement 2π-périodique.

b) On considère le cas particulier de l'équation $y'(t) - a\,y(t) = \cos(t)$ où a est réel.
Vérifier qu'on a alors :

$$F(t) = \frac{a\,e^{a\,t}}{1+a^2} + \frac{\sin(t) - a\cos(t)}{1+a^2}.$$

En déduire toutes les solutions de (E).
Parmi ces solutions, lesquelles sont 2π-périodiques?

c) On considère le cas particulier de l'équation $y'(t) - i\,y(t) = \cos(t)$.
Vérifier qu'on a alors :

$$F(t) = \frac{1}{2}\,t\,e^{i\,t} + \frac{1}{2}\sin(t).$$

En déduire toutes les solutions de (E).
Parmi ces solutions, lesquelles sont 2π-périodiques?

Dans la suite de cette partie I, on suppose la fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique et le nombre complexe a n'appartenant pas à l'ensemble $i\,\mathbb{Z} = \{i\,k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.

3°) *Etude des solutions périodiques de (E) lorsque f est périodique*

a) Montrer que si $t \longrightarrow y(t)$ est solution de l'équation (E), alors $t \longrightarrow y(t+2\pi)$ l'est aussi.
En déduire que la solution y est 2π-périodique si et seulement si $y(0) = y(2\pi)$.

b) Montrer qu'on a $e^{2a\pi} = 1$ si et seulement si $a \in i\mathbb{Z}$ (on pourra poser $a = a_1 + i\,a_2$).

c) En déduire finalement que l'équation (E) a une et une seule solution 2π-périodique y, qu'on exprimera à l'aide de la fonction F. Que permet de préciser la question 2.c)?

4°) *Développement en série de Fourier de la solution périodique de (E)*

a) Pour toute fonction continue 2π-périodique $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inu}\, g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Si g est de classe C^1, exprimer le coefficient de Fourier $c_n(g')$ en fonction de $c_n(g)$.

Dans la suite de cette question, on note toujours y l'unique solution 2π-périodique de (E).

b) En remarquant qu'on a $c_n(y' - a\,y) = c_n(f)$, exprimer $c_n(y)$ en fonction de $c_n(f)$.

c) Etablir à l'aide du théorème de Dirichlet (on en donnera l'énoncé) que la série de Fourier de y converge normalement vers y, puis exprimer y comme somme de sa série de Fourier (qu'on explicitera en fonction de a et des coefficients de Fourier $c_n(f)$ de la fonction f).

d) Retrouver alors le résultat de la question 2.b) en donnant la solution 2π-périodique y de l'équation $y'(t) - a\,y(t) = \cos(t)$ où a est réel.

■ Partie II : Etude des solutions exponentielles-polynômes

On dit qu'une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est exponentielle-polynôme s'il existe un complexe b et un polynôme P (supposé non nul) tel que $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $g(t) = P(t)\,e^{b\,t}$.

5°) *Etude de deux exemples*

a) On suppose que (E) a une solution exponentielle-polynôme définie par $y(t) = P(t)\,e^{b\,t}$.
Montrer que f est alors exponentielle-polynôme de la même forme.

b) On considère le cas particulier de l'équation $y'(t) - y(t) = t^2\,e^{-t}$.
Calculer $F(t)$ et préciser les éventuelles solutions exponentielles-polynômes de (E).

c) On considère le cas particulier de l'équation $y'(t) - y(t) = t^2\,e^{t}$.
Calculer $F(t)$ et préciser les éventuelles solutions exponentielles-polynômes de (E).

6°) *Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{C}_q[X]$*

On désigne par c un complexe, par q un entier naturel, par $\mathbb{C}_q[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à q, par Id (identité) et D (dérivation) les deux endomorphismes de $\mathbb{C}_q[X]$ qui associent à un polynôme $P \in \mathbb{C}_q[X]$ les polynômes $\mathrm{Id}(P) = P$ et $D(P) = P'$.

a) Expliciter, selon les valeurs de c, le noyau de l'endomorphisme $\varphi = D + c\,\mathrm{Id}$.
En déduire à quelle condition nécessaire et suffisante l'endomorphisme φ est bijectif.

b) Préciser le plus petit entier n tel que $D^n = 0$, c'est à dire : $\forall\, P \in \mathbb{C}_q[X]$, $D^n(P) = 0$.
En supposant le complexe c non nul, expliciter les produits de composition suivants :

$$(D + c\,\mathrm{Id}) \circ \left(\sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{c^{k+1}}\, D^k\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{c^{k+1}}\, D^k \circ (D + c\,\mathrm{Id}).$$

Qu'en déduit-on?

c) Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}_q[X]$, on considère l'équation $P' + c\,P = Q$ avec $c \neq 0$.
Montrer qu'une éventuelle solution polynôme P de cette équation appartient à $\mathbb{C}_q[X]$, et expliciter celle-ci en fonction de Q et de ses dérivés.

7°) *Etude des solutions exponentielles-polynômes de (E)*
On suppose dans cette question que la fonction f est exponentielle-polynôme :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{b\,t}\, Q(t)$$

où b désigne un nombre complexe et Q un polynôme complexe de degré q.

a) On suppose $a \neq b$ et on pose $y(t) = e^{b\,t}\, P(t)$ où P est un polynôme complexe.
- Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{C}_q[X]$ tel que y soit solution de (E).
- Préciser ce polynôme P en fonction du polynôme Q et de ses dérivés successifs.

b) On suppose $a = b$ et on pose $y(t) = e^{a\,t}\, P(t)$ où P est un polynôme complexe.
Que peut-on dire des polynômes P tels que la fonction y soit solution de (E)?

c) Retrouver ainsi les résultats des questions 5.b) et 5.c).

■ Partie III : Etude des solutions bornées sur $\mathbb{R}_+$

8°) *Comportement des solutions sur $\mathbb{R}_+$ lorsque $a < 0$*
On suppose dans cette question $a < 0$ et la fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée sur $\mathbb{R}_+$.
On notera alors $\|f\|_+ = \sup\{|f(t)| \,/\, t \geq 0\}$.

a) Montrer que la fonction F est bornée par $\frac{1}{|a|}\,\|f\|_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
En déduire que toutes les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

b) On suppose que la fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tend vers 0 en $+\infty$.
Etablir, pour tout réel $\varepsilon > 0$, qu'il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall\, t \geq A, \quad |F(t)| \;\leq\; e^{a\,t} \int_0^A e^{-a\,u}\, |f(u)|\, \mathrm{d}u + \varepsilon\, |a|\, e^{-a\,t} \int_A^t e^{-a\,u}\, \mathrm{d}u.$$

Montrer que chacun des deux termes de cette somme peut être rendu inférieur à ε pour t assez grand, et en déduire que $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 0$.
En déduire la limite de toutes les solutions de (E) quand t tend vers $+\infty$.

c) On suppose que la fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tend vers L en $+\infty$.
En écrivant que $f(t) = L + (f(t) - L)$, déterminer $\lim_{t \to +\infty} F(t)$.
En déduire la limite de toutes les solutions de (E) quand t tend vers $+\infty$.

9°) *Comportement des solutions sur $\mathbb{R}_+$ lorsque $a > 0$*
On suppose dans cette question $a > 0$ et la fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée sur $\mathbb{R}_+$.

a) Justifier l'existence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-a\,u}\, \mathrm{d}u.$$

b) On peut alors définir une fonction G par la formule suivante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = -e^{a\,t} \int_t^{+\infty} f(u)\, e^{-a\,u}\, \mathrm{d}u.$$

Vérifier que G est la seule solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (E).