Corrigé de l'épreuve I

Etude des solutions d'une équation différentielle

1°) *Forme générale des solutions de (E)*

a) Quitte à multiplier l'équation (E) par $e^{-a\,t}$ qui ne s'annule pas, l'équation (E) équivaut à :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad e^{-a\,t}(t)\, y'(t) - a\, e^{-a\,t}(t)\, y(t) \;=\; e^{-a\,t}\, f(t).$$

Ce qui s'écrit de façon équivalente :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-a\,t}(t)\, y(t)\right) = e^{-a\,t}\, f(t).$$

b) Si f est nulle, l'équation équivaut à : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-a\,t}(t)\, y(t)\right) = 0$. Il en résulte que :

$$\exists\, C \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\quad e^{-a\,t}(t)\, y(t) = C \qquad \text{ou} \qquad y(t) = C\, e^{a\,t}.$$

Si f est quelconque, on a de même :

$$\exists\, C \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\quad e^{-a\,t}(t)\, y(t) = C + \int_0^t e^{-a\,u}\, f(u)\, \mathrm{d}u \qquad \text{ou} \qquad y(t) = C\, e^{a\,t} + F(t).$$

c) Parmi ces solutions, il en existe une et une seule vérifiant $y(0) = y_0$, et c'est :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad y(t) = y_0\, e^{a\,t} + F(t) = y_0\, e^{a\,t} + e^{a\,t} \int_0^t e^{-a\,u}\, f(u)\, \mathrm{d}u.$$

■ Partie I : Etude des solutions périodiques

2°) *Etude de deux exemples*

a) Si y est une fonction dérivable et 2π-périodique, sa dérivée l'est aussi.

Si y est une solution 2π-périodique de l'équation (E), on a donc :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad f(t) = y'(t) - a\, y(t) = y'(t + 2\,\pi) - a\, y(t + 2\,\pi) = f(t + 2\,\pi).$$

Ainsi donc, f est nécessairement 2π-périodique.

b) Résolvons l'équation $y'(t) - a\, y(t) = \cos(t)$ lorsque a est réel. On a alors :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad F(t) = e^{a\,t} \int_0^t e^{-a\,u} \cos(u)\, \mathrm{d}u.$$

Par double intégration par parties, ou en remplaçant $2\cos(t) = e^{i\,t} + e^{-i\,t}$, il vient :

$$F(t) = e^{a\,t} \int_0^t e^{-a\,u} \cos(u)\, \mathrm{d}u \;=\; \frac{a\, e^{a\,t}}{1 + a^2} + \frac{\sin(t) - a\cos(t)}{1 + a^2}.$$

On en déduit immédiatement toutes les solutions de l'équation (E) :

$$y(t) = \left(C + \frac{a}{1 + a^2}\right) e^{a\,t} + \frac{\sin(t) - a\cos(t)}{1 + a^2}$$

Une de ces solutions est 2π-périodique si et seulement si $\forall\, t \in \mathbb{R},\ y(t + 2\,\pi) = y(t)$.

On en déduit que l'équation (E) a une solution 2π-périodique et une seule, qui est :

$$y(t) = \frac{\sin(t) - a\cos(t)}{1 + a^2}$$

c) Résolvons l'équation $y'(t) - i\,y(t) = \cos(t)$. On a alors :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = e^{i\,t} \int_0^t e^{-i\,u} \cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{e^{i\,t}}{2} \int_0^t \left(1 + e^{-2\,i\,u}\right) \mathrm{d}u.$$

On en déduit immédiatement $F(t)$ et l'ensemble des solutions de (E) :

$$y(t) = C\,e^{i\,t} + \frac{1}{2}\,t\,e^{i\,t} + \frac{1}{2}\sin(t).$$

Il est clair qu'aucune de ces solutions n'est périodique.

3°) *Etude des solutions périodiques de (E) lorsque f est périodique*

a) Si y est solution de (E), on a $y'(t) - a\,y(t) = f(t)$ pour tout réel t.

Quitte à changer t en $t + 2\,\pi$ et en tenant compte de la 2π-périodicité de f, on a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y'(t + 2\,\pi) - a\,y(t + 2\,\pi) = f(t + 2\,\pi) = f(t).$$

Ainsi, si $t \longrightarrow y(t)$ est solution de (E), alors $t \longrightarrow y(t + 2\,\pi)$ l'est aussi.

Or, d'après la question 1°, il existe une et une seule solution de l'équation (E) qui vérifie une condition initiale donnée en 0 : les deux solutions $t \longrightarrow y(t)$ et $t \longrightarrow y(t + 2\,\pi)$ sont donc égales si et seulement si elles prennent la même valeur en 0, soit $y(0) = y(2\,\pi)$.

b) Résolvons l'équation $e^{2\,a\,\pi} = 1$, ou, en posant $a = a_1 + i\,a_2$ avec $a_1 = \mathrm{Re}(a)$, $a_2 = \mathrm{Im}(a)$, l'équation $e^{2\,a_1\,\pi}\,e^{2\,i\,a_2\,\pi} = 1$. L'égalité des modules donne d'abord $e^{2\,a_1\,\pi} = 1$, donc $a_1 = 0$, puis l'égalité des arguments modulo 2π donne $2\,a_2\,\pi = 0\ [2\,\pi]$, soit $a_2 \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de $e^{2\,a\,\pi} = 1$ sont donc les complexes $a \in i\,\mathbb{Z}$, de la forme $a = i\,a_2$ avec $a_2 \in \mathbb{Z}$.

c) Une solution $y : t \longrightarrow C\,e^{a\,t} + F(t)$ est 2π-périodique si et seulement si $y(0) = y(2\,\pi)$, ou :

$$C = C\,e^{2\,a\,\pi} + e^{2\,a\,\pi} \int_0^{2\,\pi} e^{-a\,u} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Cette équation détermine la constante C car a n'appartenant pas à $i\,\mathbb{Z}$, on a $e^{2\,a\,\pi} \neq 1$.

On en déduit ainsi l'unique solution 2π-périodique de (E) :

$$y(t) = \frac{e^{a(t+2\,\pi)}}{1 - e^{2\,a\,\pi}} \int_0^{2\,\pi} e^{-a\,u} f(u)\,\mathrm{d}u + F(t).$$

Notons que, d'après 2.c, l'existence de solutions périodiques peut tomber en défaut si $a \in i\,\mathbb{Z}$.

4°) *Développement en série de Fourier de la solution périodique de (E)*

a) Une intégration par parties donne immédiatement $c_n(g') = i\,n\,c_n(g)$ car :

$$\frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} e^{-i\,n\,u}\,g'(u)\,\mathrm{d}u = \left[e^{-i\,n\,u}\,g(u)\right]_0^{2\,\pi} + \frac{i\,n}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} e^{-i\,n\,u}\,g(u)\,\mathrm{d}u$$

(le crochet ci-dessus est bien nul entre 0 et 2π car $u \longrightarrow e^{-i\,n\,u}\,g(u)$ est 2π-périodique).

b) Si f est 2π-périodique et si y est l'unique solution 2π-périodique de l'équation (E), on a en multipliant la relation $y'(t) - a\,y(t) = f(t)$ par $e^{-i\,n\,t}$ et en l'intégrant sur $[0, 2\pi]$:

$$c_n(y' - a\,y) = c_n(f).$$

Par linéarité de l'intégration et compte tenu de $c_n(y') = i\,n\,c_n(y)$, on a $c_n(y) = \frac{c_n(f)}{i\,n - a}$.

c) La solution 2π-périodique y de l'équation (E) est de classe C^1 (comme le sont toutes les solutions de (E)) et le théorème de convergence normale de Dirichlet démontre que la série de Fourier de y converge normalement vers y, ce qui implique pour tout réel t :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(y)\, e^{i n t} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{c_n(f)}{i n - a}\, e^{i n t}.$$

d) On peut alors retrouver le résultat de la question 2.(b).
En effet, on a $f(t) = \cos(t) = \frac{1}{2}\, e^{i t} + \frac{1}{2}\, e^{-i t}$ qui est bien 2π-périodique.
Ses coefficients de Fourier sont donc $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$, avec $c_n = 0$ sinon, de sorte que l'unique solution 2π-périodique de l'équation $y'(t) - a\, y(t) = \cos(t)$ avec a réel est bien :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{c_n(f)}{i n - a}\, e^{i n t} = \frac{e^{i t}}{2\,(i - a)} - \frac{e^{-i t}}{2\,(i + a)} = \frac{\sin(t) - a\cos(t)}{1 + a^2}.$$

■ Partie II : Etude des solutions exponentielles-polynômes

5°) *Etude de deux exemples*

a) Si $y(t) = P(t)\, e^{b t}$ est solution de l'équation $y'(t) - a\, y(t) = f(t)$, on a :

$$f(t) = y'(t) - a\, y(t) = P'(t)\, e^{b t} + b\, P(t)\, e^{b t} - a\, P(t)\, e^{b t} = (P'(t) + (b - a)\, P(t))\, e^{b t}.$$

Ainsi, si (E) a une solution exponentielle-polynôme $y(t) = P(t)\, e^{b t}$, le second membre f est nécessairement exponentiel-polynôme de la forme $f(t) = Q(t)\, e^{b t}$

b) Deux intégrations par parties donnent facilement :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = e^t \int_0^t e^{-2u}\, u^2\, du = \frac{e^t}{4} - \frac{e^{-t}}{4}\left(2\, t^2 + 2\, t + 1\right).$$

Les solutions de l'équation $y'(t) - y(t) = t^2\, e^{-t}$ sont donc :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \left(C + \frac{1}{4}\right) e^t - \frac{e^{-t}}{4}\left(2\, t^2 + 2\, t + 1\right).$$

La seule solution exponentielle-polynôme est donc définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = -\frac{e^{-t}}{4}\left(2\, t^2 + 2\, t + 1\right).$$

c) On a ici de façon immédiate :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = e^t \int_0^t u^2\, du = \frac{t^3\, e^t}{3}.$$

Les solutions de l'équation $y'(t) - y(t) = t^2\, e^t$ sont donc :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = C\, e^t + \frac{t^3\, e^t}{3} = e^t\left(\frac{t^3}{3} + C\right).$$

Toutes les solutions sont ici exponentielles-polynômes.

6°) *Etude d'un endomorphisme de* $\mathbb{C}_q[X]$

a) Examinons le noyau de l'endomorphisme $\varphi = D + c\,\mathrm{Id}$:

- si $c = 0$, $\varphi(P) = P' = 0$ équivaut à $P \in \mathbb{C}_0[X]$, et $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{C}_0[X]$.
- si $c \neq 0$, $\varphi(P) = P' + c\,P = 0$ implique $P' = -c\,P$, d'où, si $P \neq 0$, l'égalité d°(P') = d°(P). Celle-ci est impossible, ce qui établit que $P = 0$.

Comme $\mathbb{C}_q[X]$ est de dimension finie, l'endomorphisme $\varphi = D + c\,\mathrm{Id}$ est bijectif si et seulement s'il est injectif, donc si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$, donc si et seulement si $c \neq 0$.

b) Pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à q, on a $D^{q+1}(P) = 0$ (mais on n'a pas nécessairement $D^q(P) = 0$ puisque $D^q(X^q) = q\,!$). Si $c \neq 0$, on en déduit que :

$$(D + c\,\mathrm{Id}) \circ \left(\sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{c^{k+1}} D^k \right) = \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{c^{k+1}} D^{k+1} + \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{c^k} D^k$$

$$= \sum_{k=1}^{q+1} \frac{(-1)^{k-1}}{c^k} D^k + \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{c^k} D^k = \mathrm{Id} + \frac{(-1)^q}{c^{q+1}} D^{q+1} = \mathrm{Id}.$$

On fait le même calcul dans l'autre sens, et on en tire finalement l'inverse de $\varphi = D + c\,\mathrm{Id}$:

$$(D + c\,\mathrm{Id})^{-1} = \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{c^{k+1}} D^k = \frac{1}{c}\,\mathrm{Id} - \frac{1}{c^2} D + \frac{1}{c^3} D^2 - \ \dots\ + \frac{(-1)^q}{c^{q+1}} D^q.$$

c) Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}_q[X]$, l'équation $P' + c\,P = Q$ s'écrit $\varphi(P) = Q$.
Ses solutions sont nécessairement de même degré que le polynôme Q, elles appartiennent donc à $\mathbb{C}_q[X]$ et il existe donc une et une seule solution, qui est :

$$\varphi^{-1}(Q) = (D + c\,\mathrm{Id})^{-1}(Q) = \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{c^{k+1}} Q^{(k)} = \frac{1}{c} Q - \frac{1}{c^2} Q' + \frac{1}{c^3} Q'' - \ \dots\ + \frac{(-1)^q}{c^{q+1}} Q^{(q)}.$$

7°) *Etude des solutions exponentielles-polynômes de (E)*

a) L'application $t \longrightarrow y(t) = e^{b\,t} P(t)$ est solution de l'équation $y'(t) - a\,y(t) = e^{b\,t} Q(t)$ si et seulement si $e^{b\,t} P'(t) + (b - a)\,e^{b\,t} P(t) = e^{b\,t} Q(t)$, soit $P' + (b - a)\,P = Q$ puisqu'une exponentielle ne s'annule jamais. Si $b \neq a$, donc $c \neq 0$, on a établi au 6° que cette équation admet l'unique solution P suivante :

$$P = \varphi^{-1}(Q) = \frac{1}{c} Q - \frac{1}{c^2} Q' + \frac{1}{c^3} Q'' - \ \dots\ + \frac{(-1)^q}{c^{q+1}} Q^{(q)}.$$

b) Si $b = a$, l'application $t \longrightarrow y(t) = e^{b\,t} P(t)$ est solution de $y'(t) - a\,y(t) = e^{a\,t} Q(t)$ si et seulement si $e^{b\,t} P'(t) = e^{b\,t} Q(t)$, soit $P' = Q$ et cette équation admet pour solutions P l'ensemble des polynômes dont la dérivée est Q.

c) En appliquant le résultat de cette question, on voit que :

- l'unique solution exponentielle-polynôme de l'équation $y'(t) - y(t) = t^2\,e^{-t}$ est :

$$y(t) = -\frac{e^{-t}}{4}\left(2\,t^2 + 2\,t + 1\right).$$

(On a en effet $a = 1$, $b = -1$, donc $c = b - a$, et on résout $P' - 2P = Q$ avec $Q(t) = t^2$).

- les solutions exponentielles-polynômes de l'équation $y'(t) - y(t) = t^2 e^t$ sont :

$$y(t) = e^t\left(\frac{t^3}{3} + C\right).$$

(On a en effet $a = b = 1$, donc $c = 0$, et on résout $P' = Q$ avec $Q(t) = t^2$).

Notons qu'on a ainsi toutes les solutions de l'équation, qui sont donc toutes des solutions exponentielles-polynômes.

■ Partie III : Etude des solutions bornées sur $\mathbb{R}_+$

8°) *Comportement des solutions sur* $\mathbb{R}_+$ *lorsque* $a < 0$

a) La fonction F est clairement bornée sur $\mathbb{R}_+$ lorsque f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ par $\|f\|_+$ car :

$$\forall\, t \geq 0, \quad |F(t)| = e^{a\,t}\left|\int_0^t e^{-a\,u} f(u)\,\mathrm{d}u\right| \leq e^{a\,t}\int_0^t e^{-a\,u}\,|f(u)|\,\mathrm{d}u \leq e^{a\,t}\,\|f\|_+\int_0^t e^{-a\,u}\,\mathrm{d}u.$$

Le calcul de cette dernière intégrale donne :

$$\forall\, t \geq 0, \quad |F(t)| \leq \|f\|_+\, e^{a\,t}\,\frac{1 - e^{-a\,t}}{a} = \|f\|_+\,\frac{1 - e^{a\,t}}{|a|} \leq \frac{1}{|a|}\,\|f\|_+.$$

On en déduit que F est bornée, et qu'on a $\|F\|_+ \leq \frac{1}{|a|}\,\|f\|_+$.

Comme les autres solutions s'écrivent $y(t) = F(t) + C\,e^{a\,t}$, on a de même $\|y\|_+ \leq \|F\|_+ + |C|$.

b) Si la fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tend vers 0 en $+\infty$, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, A > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+ : \quad x \geq A \implies |f(x)| \leq \varepsilon\,|a|.$$

Pour $x \geq A$, on en déduit la majoration suivante :

$$\forall\, t \geq A, \quad |F(t)| \leq e^{a\,t}\int_0^A |f(u)|\,e^{-a\,u}\,\mathrm{d}u + e^{a\,t}\int_A^t |f(u)|\,e^{-a\,u}\,\mathrm{d}u.$$

$$\forall\, t \geq A, \quad |F(t)| \leq e^{a\,t}\int_0^A |f(u)|\,e^{-a\,u}\,\mathrm{d}u + \varepsilon\,|a|\;e^{a\,t}\int_A^t e^{-a\,u}\,\mathrm{d}u.$$

En calculant la dernière intégrale, celle-ci se majore par $\frac{1}{|a|}\,e^{-a\,t}$ et il vient :

$$\forall\, t \geq A, \quad |F(t)| \leq e^{a\,t}\int_0^A |f(u)|\,e^{-a\,u}\,\mathrm{d}u + \varepsilon\,.$$

Le membre de droite de l'inégalité tend vers ε quand t tend vers $+\infty$, et il existe donc $B \geq 0$ tel que, pour $t \geq B$, ce second membre soit inférieur à 2ε, d'où :

$$\forall\, t \geq \max(A, B), \quad |F(t)| \leq 2\,\varepsilon\,.$$

Ce qui signifie qu'on a $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 0$.

c) Si la fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tend vers L en $+\infty$, on peut écrire :

$$\forall\, t \geq 0, \quad F(t) = e^{a\,t}\int_0^t e^{-a\,u}(f(u) - L)\,\mathrm{d}u + L\,e^{a\,t}\int_0^t e^{-a\,u}\,\mathrm{d}u.$$

Comme la limite de $f - L$ en $+\infty$ est nulle, le résultat de la question b) démontre que la première intégrale ci-dessus tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

La seconde intégrale tend alors vers $L\,/\,|a|$ quand t tend vers $+\infty$ puisqu'on a :

$$\forall\, t \geq 0, \quad L\,e^{a\,t}\int_0^t e^{-a\,u}\,\mathrm{d}u = L\,e^{a\,t}\,\frac{e^{-a\,t} - 1}{|a|} = L\,\frac{1 - e^{a\,t}}{|a|}.$$

On en déduit que si $\lim_{t \to +\infty} f(t) = L$, alors $\lim_{t \to +\infty} F(t) = L / |a|$.
Et comme la solution générale s'écrit $y(t) = F(t) + C\, e^{a\,t}$, on voit que si $\lim_{t \to +\infty} f(t) = L$, alors toutes les solutions de l'équation tendent vers $L / |a|$.

9°) *Comportement des solutions sur* $\mathbb{R}_+$ *lorsque* $a > 0$
a) La fonction $u \longrightarrow f(u)\, e^{-a\,u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle est majorée par la fonction intégrable $u \longrightarrow \|f\|_+\, e^{-a\,u}$ (on a en effet $a > 0$), ce qui justifie l'existence de l'intégrale I.

b) La fonction G ci-dessous est solution de (E) puisqu'elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = F(t) - e^{a\,t}\, I = e^{a\,t} \int_0^t f(u)\, e^{-a\,u}\, \mathrm{d}u - e^{a\,t} \int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-a\,u}\, \mathrm{d}u$$

soit encore, avec la relation de Chasles :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = -e^{a\,t} \int_t^{+\infty} f(u)\, e^{-a\,u}\, \mathrm{d}u.$$

Cette solution est bien bornée sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'on a :

$$\forall\, t \geq 0, \quad |G(t)| = e^{a\,t} \left| \int_t^{+\infty} f(u)\, e^{-a\,u}\, \mathrm{d}u \right| \leq e^{a\,t} \int_t^{+\infty} |f(u)|\, e^{-a\,u}\, \mathrm{d}u \leq \frac{1}{a}\, \|f\|_+.$$

Toute autre solution n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$ car elle s'obtient en ajoutant à cette solution une solution de l'équation homogène $t \longrightarrow C\, e^{a\,t}$, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Suite possible

■ Partie IV : Etude d'approximations successives d'une solution

On étudie dans cette partie une méthode d'approximation par une suite de fonctions (y_n) de la solution y du problème suivant : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ y'(t) - a\, y(t) = f(t)$ avec $y(0) = y_0 \in \mathbb{C}$.

10°) Etablir l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(1) il existe une fonction $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - a\, y(t) = f(t) \qquad \text{et} \qquad y(0) = y_0.$$

(2) il existe une fonction $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, continue sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t (a\, y(u) + f(u))\, \mathrm{d}u.$$

Dans la suite de cette partie, on convient de définir comme suit une suite de fonctions (y_n), continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, par $y_0(t) = y_0$, puis, pour tout entier naturel n par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_{n+1}(t) = y_0 + \int_0^t (a\, y_n(u) + f(u))\, \mathrm{d}u.$$

11°) *Etude d'un exemple*

On suppose ici que y_0 est donné dans $\mathbb{C}$, et que f est la fonction nulle.

a) Préciser $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

b) Formuler une hypothèse de récurrence pour y_n et vérifier celle-ci.
En déduire la limite simple de la suite (y_n) et la comparer à la solution exacte de (E).

12°) *Etude de la convergence de la suite de fonctions* (y_n)

On établit dans cette question la convergence de la suite de fonctions (y_n) vers la solution y du problème de Cauchy précédent.

a) Pour tout nombre réel t, montrer l'inégalité suivante :

$$|y_{n+1}(t) - y(t)| \ \leq\ |a| \left| \int_0^t |y_n(u) - y(u)|\, \mathrm{d}u \right|.$$

b) Pour tout réel $c > 0$, on pose dans la suite : $\|y_n - y\|_c = \sup \{|y_n(t) - y(t)| \ /\ t \in [-c, c]\}$.

- Prouver par récurrence qu'on a pour tout entier naturel n :

$$\forall\, t \in [-c, c], \quad |y_n(t) - y(t)| \ \leq\ \frac{|a|^n\, |t|^n}{n!}\, \|y_0 - y\|_c.$$

- En déduire l'inégalité suivante pour tout réel $c > 0$:

$$\|y_n - y\|_c \ \leq\ \frac{|a|^n\, c^n}{n!}\, \|y_0 - y\|_c.$$

c) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \|y_n - y\|_c = 0$, et que la suite (y_n) converge simplement vers la solution y sur $\mathbb{R}$.

■ Partie IV : Etude d'approximations successives d'une solution

10°) Pour montrer que (1) implique (2), intégrons de 0 à t la relation $y'(t) = a\,y(t) + f(t)$ en tenant compte de la condition $y(0) = y_0$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) - y_0 = \int_0^t (a\,y(u) + f(u))\,\mathrm{d}u.$$

Inversement, si y est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation ci-dessus, on voit que
le membre de droite est la primitive s'annulant en 0 de la fonction continue $a\,y + f$, d'où résulte son caractère C^1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi, le membre de gauche y est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a par dérivation en t et par évaluation en 0 de cette relation :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - a\,y(t) = f(t) \qquad \text{et} \qquad y(0) = y_0.$$

11°) *Etude d'un exemple*

a) Si $f = 0$, la suite (y_n) est définie par $y_0(t) = y_0$, puis par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t) = y_0 + a\int_0^t y_0(u)\,\mathrm{d}u \;=\; y_0(1 + a\,t).$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_2(t) = y_0 + a\int_0^t y_1(u)\,\mathrm{d}u \;=\; y_0\left(1 + a\,t + \frac{a^2\,t^2}{2}\right).$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_3(t) = y_0 + a\int_0^t y_2(u)\,\mathrm{d}u \;=\; y_0\left(1 + a\,t + \frac{a^2\,t^2}{2} + \frac{a^3\,t^3}{6}\right).$$

b) On peut alors supposer que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_n(t) = \; y_0\left(1 + a\,t + \frac{a^2\,t^2}{2!} + \frac{a^3\,t^3}{3!} + \;\ldots\; + \frac{a^n\,t^n}{n!}\right).$$

La relation $y_{n+1}(t) = y_0 + a\int_0^t y_n(u)\,\mathrm{d}u$ permet alors de vérifier facilement cette hypothèse, et d'après le développement en série entière de l'exponentielle, on voit que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \to +\infty} y_n(t) = \; y_0 \lim_{t \to +\infty}\left(1 + a\,t + \frac{a^2\,t^2}{2!} + \frac{a^3\,t^3}{3!} + \;\ldots\; + \frac{a^n\,t^n}{n!}\right) = y_0\, e^{a\,t}.$$

Il s'agit bien de la solution de l'équation $y'(t) = a\,y(t)$ avec $y(0) = y_0$.

12°) *Etude de la convergence de la suite de fonctions* (y_n)

a) La solution y du problème de Cauchy proposé vérifie, d'après 10° :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t (a\,y(u) + f(u))\,\mathrm{d}u.$$

Et vue la définition de y_{n+1}, on en déduit par différence la majoration voulue :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |y_{n+1}(t) - y(t)| = \left| a\int_0^t (y_n(u) - y(u))\,\mathrm{d}u \right| \;\le\; |a|\left| \int_0^t |y_n(u) - y(u)|\,\mathrm{d}u \right|.$$

b) Pour tout $c > 0$, on pose $\|y_n - y\|_c = \sup\{|y_n(t) - y(t)| \;/\; t \in [-c, c]\}$.

On raisonne alors par récurrence, l'inégalité proposée étant triviale pour $n = 0$.

En supposant l'hypothèse vraie au rang n, on a alors pour $|t| \le c$:

$$|y_{n+1}(t) - y(t)| \;\leq\; |a| \int_0^t |y_n(u) - y(u)|\, du \;\leq\; |a|\, \|y_0 - y\|_c \left| \int_0^t \frac{|a|^n\, |u|^n}{n\,!}\, du \right|.$$

Quitte à distinguer les cas $t \geq 0$ et $t \leq 0$, on en déduit pour $|t| \leq c$:

$$\forall\, t \in [-c,\, c], \quad |y_{n+1}(t) - y(t)| \;\leq\; \frac{|a|^{n+1}\, |t|^{n+1}}{(n+1)\,!}\, \|y_0 - y\|_c.$$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée, et on en déduit aussitôt que :

$$\|y_n - y\|_c \;\leq\; \frac{|a|^n\, c^n}{n\,!}\, \|y_0 - y\|_c.$$

c) La suite $n \longrightarrow \frac{|a|^n\, c^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ puisqu'il s'agit du terme général de la série convergente définissant $\exp(|a|\, c)$. Il en résulte qu'on a $\lim_{n \to +\infty} \|y_n - y\|_c = 0$.
On a donc la convergence uniforme sur tout segment $[-c,\, c]$ de la suite (y_n) vers y.
Il en résulte, pour tout réel t, que : $|y_n(t) - y(t)| \leq \|y_n - y\|_{|t|}$.
Il en résulte, pour tout réel t, que : $\lim_{n \to +\infty} y_n(t) = y(t)$.
On a donc la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (y_n) vers y.
