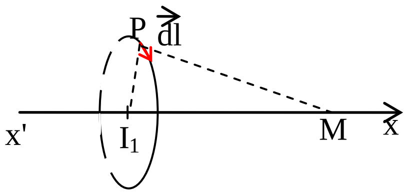
Etude d'un moteur synchrone

I- Production d'un champ magnétique homogène:



Une spire circulaire de centre I_1, de rayon R et d'axe x'x est parcourue par le courant i dans le sens indiqué sur la figure.

1)- P étant un point de la spire, et $\overrightarrow{dl}$ le vecteur élémentaire de la spire, au voisinage de P et dans le sens de i, exprimer, par une intégrale étendue à la spire, le champ $\vec{B} = B \cdot \vec{u}_x$ produit par ce circuit au point M d'abscisse x sur l'axe des x, en fonction de i, $\overrightarrow{dl}$, $\overrightarrow{PM}$ et μ_0, perméabilité du vide. On pourra poser $\left\|\overrightarrow{PM}\right\| = r$.

2)- En posant $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PI_1} + \overrightarrow{I_1M}$, montrer qu'une des intégrales issues de la précédente est nulle.

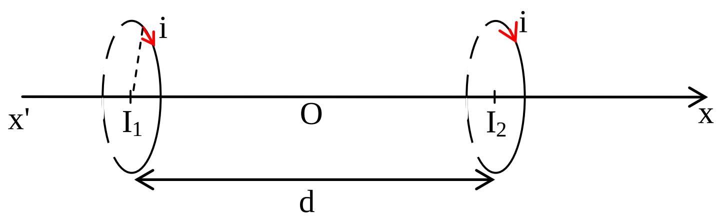
3)- En déduire l'expression du champ magnétique créé en M: on le mettra sous la forme:

$$\vec{B} = a \cdot y \cdot \vec{u}_x \text{ avec } y = \frac{1}{\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

et on donnera l'expression de a.

4)-Exprimer les dérivées $y' = \frac{dy}{dx}$ et $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, en déduire la position des points remarquables (extremum, inflexion)de la courbe représentant les variations de B(x).

Tracer l'allure de cette courbe.



On place en I_2, sur l'axe des x, tel que $\overline{I_1I_2} = d$ une seconde spire, identique à la précédente, de même axe x'x et parcourue dans le même sens par le même courant i.

On s'intéresse au champ créé par les deux spires au point O de l'axe, milieu du segment I_1I_2.

Ce champ s'écrit:

$$\vec{B} = B_1 \cdot \vec{u}_x + B_2 \cdot \vec{u}_x$$

et on remarquera que $B_2 = B_1\left(-\frac{d}{2}\right)$.

5)- En raisonnant sur la parité de y et de ses dérivées,

a)- Montrer que toutes les dérivées impaires de B sont nulles en O.

b)- Pour quelle valeur de d le champ B en O ne varie-t-il qu'au quatrième ordre en OM au voisinage de O ?

Le champ ainsi obtenu sera noté en O:

$$\vec{B} = K \cdot i \cdot \vec{u}_x$$

et sera considéré comme quasi uniforme.

II- Production d'un champ tournant en O:

On souhaite créer en O un champ magnétique de module B_0 constant, et tournant autour de l'axe Oz avec la vitesse angulaire ω_0. Dans ces conditions, le champ fait à l'instant t l'angle $\omega_0 t$ avec l'axe des x.

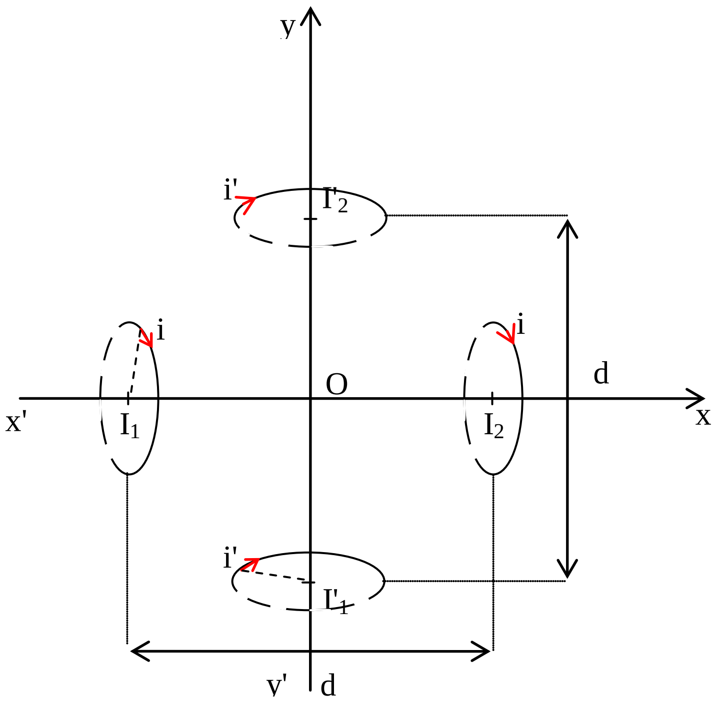
1)- Le champ tournant s'écrit:

$$\vec{B}_0 = B_{0x} \cdot \vec{u}_x + B_{0y} \cdot \vec{u}_y$$

Donner l'expression des coordonnées B_{0x} et B_{0y} de $\vec{B}_0$.

2)- On place sur l'axe des y deux spires identiques aux deux précédentes, d'axe Oy, et placées à la même distance de O que les deux précédentes. Ces deux spires sont parcourues par un même courant i', de manière à créer en O un champ:

$$\vec{B}' = K \cdot i' \cdot \vec{u}_x$$



Les courants i et i' sont maintenant alternatifs, sinusoïdaux de pulsation ω_0, de même amplitude et déphasés de φ; ils s'écrivent:

$$i = i_0 \cos \omega_0 t \quad \text{et} \quad i' = i_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Déterminer φ pour que le champ résultant soit de la même forme que $\vec{B}_0$.

III- Moteur synchrone

On place en O dans le plan xOy, un aimant permanent équivalent à un dipôle magnétique de moment $\vec{\mu}$, pouvant tourner autour de l'axe Oz, avec la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_z$.

1)- Exprimer le moment $\vec{\Gamma} = \Gamma \cdot \vec{u}_z$ du couple magnétique auquel est soumis le dipôle. L'angle entre l'axe Ox et le vecteur $\vec{\mu}$ sera noté:

$$\left(\overrightarrow{Ox}, \vec{\mu}\right) = \omega t - \alpha$$

où α a une valeur constante.

2)- Montrer que la moyenne $<\Gamma>$ de ce moment sur un nombre entier de tours est nulle, sauf pour une valeur particulière de ω que l'on précisera. Exprimer alors $<\Gamma>$ en fonction de μ, B_0 et α, puis en fonction de μ, α, K et i_0.

3)- Exprimer la puissance moyenne <P> de ce couple, et en déduire la condition pour que le couple soit moteur. Cette condition se traduit-elle par une avance ou par un retard du moment magnétique par rapport au champ tournant?

4)- On se place par la suite dans le cas où ω_0 est positif. Donner l'allure de la courbe donnant le couple moyen en fonction de α dans le domaine où ce couple est moteur.Donner l'expression de $<\Gamma_{max}>$, valeur maximum du couple moyen.

5)- Un couple résistant de moment par rapport à Oz, Γ_r est appliqué au rotor. Donner la condition pour que le rotor tourne à vitesse constante. Porter $|\Gamma_r|$ sur la courbe; en déduire qu'il peut y avoir deux points de fonctionnement α_1 et α_2 que l'on fera apparaître sur la courbe, à condition que $|\Gamma_r|$ soit inférieur à une valeur que l'on déterminera.

6)- Un seul de ces deux points de fonctionnement est stable. Déterminer lequel.(On pourra donner un très léger accroissement au couple résistant, et chercher sa conséquence sur ω et sur le couple moteur).

Mise sur orbite d'un satellite

Dans le domaine des télécommunications, les satellites géostationnaires ont marqué un gros progrès. Ils présentent cependant un certain nombre d'inconvénients: d'une part, leur orbite équatoriale n'est pas visible depuis les hautes latitudes, d'autre part, leur grande distance de la terre entraîne un temps de transfert non négligeable, particulièrement gênant pour la téléphonie et l'internet par satellite.
Pour ces différentes applications, on préfère donc utiliser des constellations de satellites en orbite plus basse. Le but du problème est d'étudier quelques aspects relatifs à la mise sur orbite et au lancement d'un de ces satellites.

La terre sera considérée comme une sphère parfaite de rayon R = 6400 km, et le référentiel géocentrique, galiléen.
On notera G la constante de gravitation, M la masse de la terre, et g_0 le champ de gravitation à la surface de la terre. Pour les applications numériques, on prendra:

$$g_0 = 9,8\ m.s^{-2}$$

L'étude sera faite pour un satellite de type M.E.O (middle earth orbit), d'orbite circulaire à l'altitude h = 8000 km.

On se placera dans le plan du mouvement rapporté à la base polaire $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}$

I- Etude de l'orbite circulaire:

Le satellite, de masse m, à l'altitude h, est soumis à la force gravitationnelle terrestre $\vec{F}$, dérivant de l'énergie potentielle E_p. On négligera toute autre action.

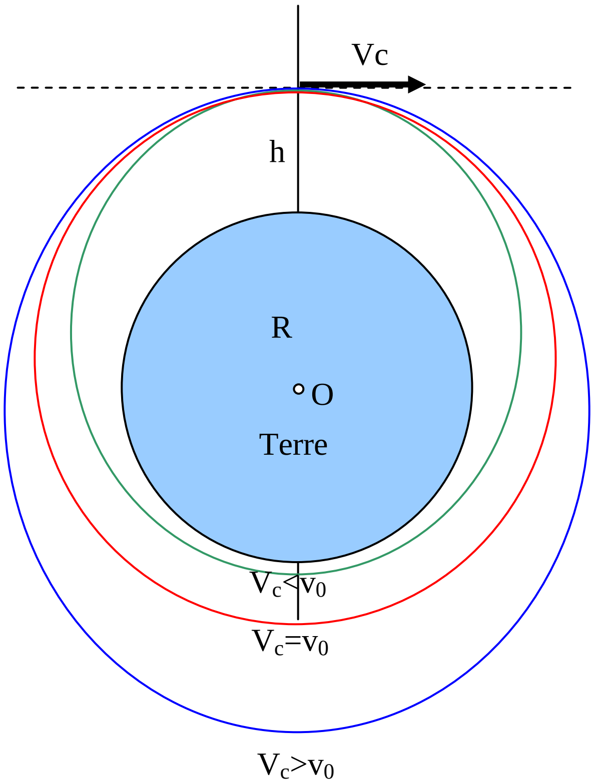
1)- Exprimer $\vec{F}$ et E_p en fonction de G, M, m, R, h et $\overrightarrow{u_r}$ puis en fonction de m, g_0, R et h.

2)- On se place dans le plan du mouvement, rapporté à la base polaire $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}$, avec $r = R + h$.

Déterminer, pour le mouvement circulaire les expressions de la vitesse et de l'accélération du satellite.

3)- En déduire que le satellite a une vitesse de module constant v_0. Exprimer v_0 en fonction de g_0, R et h. Donner sa valeur numérique pour h = 8000 km.

4)- Exprimer l'énergie mécanique E du satellite en fonction de m, g_0, R et h.



5)- Exprimer sa période T en fonction de R, h et v_0. Donner sa valeur numérique pour h = 8000 km.

II- Mise sur orbite

Durant sa phase de lancement, hors atmosphère terrestre, en l'absence de toute cause de perte d'énergie, le satellite a une trajectoire elliptique d'altitude h = 8000 km à son apogée. En ce point, où la vitesse est orthoradiale, on modifie la valeur de la vitesse sans en modifier la direction, pour procéder à la mise sur orbite. Cette modification est supposée assez brève pour qu'on puisse négliger le déplacement du satellite durant cette modification. La vitesse communiquée est V_c.

Pour obtenir une orbite circulaire, $V_c = v_0$.

Si on fait une erreur sur cette vitesse, le satellite prend une orbite elliptique ou éventuellement parabolique ou hyperbolique.

Le satellite peut être considéré comme perdu:

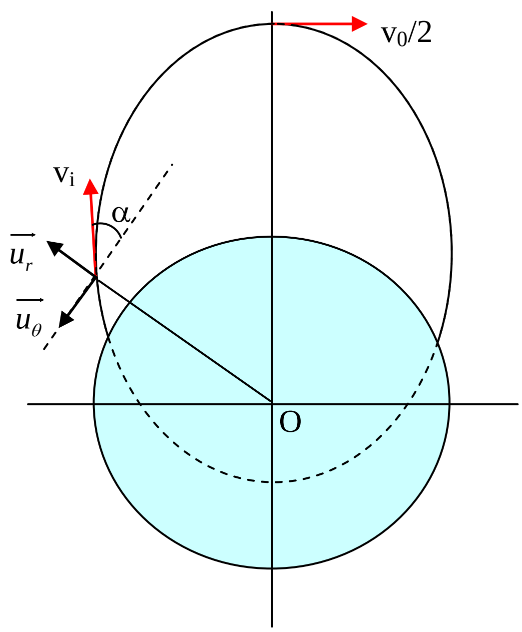
- Soit si sa trajectoire devient parabolique ou hyperbolique (vitesse communiquée supérieure ou égale à v_L)
- Soit si le périgée de sa trajectoire devient inférieur ou égal à R (vitesse communiquée inférieure ou égale à v_1)

1)- Donner l'expression de v_L en fonction de g_0, R et h, puis en fonction de v_0.

2)- Donner l'expression de la vitesse v_1 en fonction de g_0, R et h. On rappelle que l'énergie mécanique sur une trajectoire elliptique a la même expression que sur une trajectoire circulaire, à condition de remplacer le rayon de l'orbite par le demi grand axe de l'ellipse.

Donner la valeur numérique de v_1 pour h = 8000 km. Conclusion ? Est-ce qu'on peut vraiment aller jusqu'à la vitesse v_1 sans dommage pour le satellite ?

III- Lancement du satellite:



Le satellite, lancé d'un point de la terre, est accéléré par ses moteurs, puis abandonné à lui-même à l'altitude a = 100 km (on considère alors qu'on est hors atmosphère terrestre) avec la vitesse v_i faisant avec l'horizontale locale un angle α.

1)- On désire que le satellite arrive à l'altitude h avec la vitesse horizontale $\frac{v_0}{2}$. Exprimer la vitesse v_i en fonction de v_0, R, h, a et g_0. Donner sa valeur numérique.

2)- Déterminer l'angle de tir nécessaire. On donnera l'expression de $\cos\alpha$ en fonction de v_i, v_0, h,R et a, puis la valeur numérique de α en degrés.