E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (2 h)

Dans la partie I de ce problème, on étudie l'intégrale de Wallis généralisée, définie par :

$$\forall\, x > -1, \quad W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dans la partie II, on relie cette fonction W à la fonction Gamma d'Euler.

■ Partie I : étude de la fonction *W*

1°) *Premières propriétés de la fonction W*

a) Montrer que l'intégrale $W(x)$ est définie pour tout réel positif x.

b) Préciser un équivalent simple de la fonction $t \longrightarrow \sin^x(t)$ quand t tend vers 0.
En déduire pour quelles valeurs du réel x l'intégrale $W(x)$ est définie.

c) Déterminer le sens de variation de la fonction W sur $]-1, +\infty[$.

d) Etablir que la fonction W est continue sur $\mathbb{R}_+$ (on citera précisément le théorème utilisé).

2°) *Première équation fonctionnelle de la fonction W et applications*

a) En écrivant $\sin^{x+2}(t) = \sin(t)\sin^{x+1}(t)$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall\, x > -1, \quad (x+2)\,W(x+2) = (x+1)\,W(x).$$

b) En déduire que la fonction W est également continue sur $]-1, +\infty[$.

c) En déduire un équivalent de $W(x)$ quand x tend vers -1.

3°) *Deuxième équation fonctionnelle de la fonction W et applications*

a) Etablir que la fonction φ définie sur $]-1, +\infty[$ par $\varphi(x) = (x+1)\,W(x+1)\,W(x)$ vérifie :

$$\forall\, x > -1, \quad \varphi(x+1) = \varphi(x).$$

En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b) Etablir l'encadrement suivant pour tout réel $x \in]0, 1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\varphi(n+1)}{n+2} \le \frac{\varphi(n+x)}{n+1+x} \le \frac{\varphi(n)}{n+1}.$$

En déduire un encadrement de $\varphi(x)$ pour tout réel $x \in]0, 1]$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, en déduire que la fonction φ est constante, et préciser φ.

c) En déduire l'encadrement suivant pour $x > 0$:

$$\frac{\pi}{2\,(x+1)} \le W^2(x) \le \frac{\pi}{2\,x}.$$

En déduire un équivalent de $W(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4°) *Application au calcul de l'intégrale de Gauss*

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1 et on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \quad \text{si } \ 0 \leq x \leq \sqrt{n}\,, \qquad f_n(x) = 0 \quad \text{si } \ x \geq \sqrt{n}\,.$$

a) En exploitant la concavité de la fonction ln, montrer qu'on a $f_n(x) \leq e^{-x^2}$ pour $x \geq 0$.

b) Etudier la convergence simple de la suite (f_n).

c) Justifier l'égalité suivante (on citera précisément le théorème utilisé) :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

d) Exprimer l'intégrale de f_n sur $[0, +\infty[$ en fonction de n et de $W(2\,n + 1)$.

Déduire de ces résultats la valeur de l'intégrale de la fonction $x \longrightarrow e^{-x^2}$ sur $[0, +\infty[$.

■ Partie II : Relation entre les fonctions W et Γ

La fonction Γ d'Euler est définie pour $t > 0$ par :

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{t-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

1°) *Propriétés de la fonction* Γ

a) Etablir que l'intégrale $\Gamma(t)$ est définie pour $t > 0$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, établir que $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$ pour $t > 0$.

c) Pour tout entier naturel n, exprimer $\Gamma(n+1)$ en fonction de n.

2°) *Relation entre les fonctions W et* Γ

On considère deux réels strictement positifs t et R, et les parties du plan définies par :

$$\mathcal{P}(R) = \{(x,\, y)\ /\ 0 \leq x \leq R,\ 0 \leq y \leq R\} \quad ; \quad C(R) = \left\{(x,\, y)\ /\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$$

a) Etablir l'égalité suivante :

$$\lim_{R \to +\infty} \iint_{\mathcal{P}(R)} e^{-x^2-y^2}\,y^t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\Gamma\!\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

b) Effectuer un passage en coordonnées polaires dans l'intégrale double ci-dessous, puis en déduire l'égalité suivante :

$$\lim_{R \to +\infty} \iint_{C(R)} e^{-x^2-y^2}\,y^t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{t}{4}\,\Gamma\!\left(\frac{t}{2}\right) W(t).$$

c) Comparer au sens de l'inclusion les parties $C(R)$, $\mathcal{P}(R)$, $C\!\left(R\sqrt{2}\right)$, et en déduire que :

$$\iint_{C(R)} e^{-x^2-y^2}\,y^t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_{\mathcal{P}(R)} e^{-x^2-y^2}\,y^t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_{C\left(R\sqrt{2}\right)} e^{-x^2-y^2}\,y^t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, déterminer une expression de $W(t)$ à l'aide de la fonction Γ.

3°) *Une application à la fonction* Γ

Etablir qu'on a, lorsque t tend vers $+\infty$, l'équivalence suivante : $\Gamma\!\left(t + \frac{1}{2}\right) \sim \sqrt{t}\;\Gamma(t)$.