E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

Dans ce problème, on étudie un algorithme de calcul de la plus grande des valeurs propres de certaines matrices symétriques réelles et on teste celui-ci sur l'exemple des matrices M_n d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont l'élément situé en ligne i et colonne j est égal à $m_{i\,j} = \min(i,\ j)$.

Dans la suite, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2,\ \ldots, e_n)$, et on convient d'identifier tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ (c'est à dire tout n-uplet $x = (x_1, x_2,\ \ldots, x_n)$) à la matrice-colonne de ses composantes $(x_1, x_2,\ \ldots, x_n)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$.
On munit enfin $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel, noté $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ et défini par $\langle x,\ y\rangle = {}^t x\, y$ (donc par $x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ \ldots\ + x_n\, y_n$), et de la norme euclidienne associée, notée $\|\ .\ \|$.

■ Partie I : Un algorithme de calcul de la plus grande valeur propre

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $M = \left(m_{i\,j}\right)$ dans la base canonique est symétrique réelle, et on suppose de plus qu'elle vérifie la propriété suivante $\mathcal{P}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\quad {}^t x\, M\, x\ >\ 0.$$

1°) *Quelques propriétés de l'endomorphisme f*

a) Pour tout couple $(x,\ y)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, montrer qu'on a $\langle x,\ f(y)\rangle = {}^t x\, M\ y$.
En déduire la relation $\langle f(x),\ y\rangle = \langle x,\ f(y)\rangle$.

b) On considère deux vecteurs propres x et y de f associés à deux valeurs propres λ et μ.
Etablir, si $\lambda \neq \mu$, que les vecteurs x et y sont orthogonaux.

c) Justifier, à l'aide d'un théorème qu'on énoncera précisément, que la matrice M, et donc l'endomorphisme f, sont diagonalisables et en déduire que les sous-espaces propres de f sont supplémentaires et deux à deux orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$.

d) Montrer enfin que les valeurs propres de f sont toutes strictement positives.

Dans la suite, on note $\lambda_1 < \lambda_2 < \ \ldots\ < \lambda_p$ les valeurs propres *distinctes* de f et on a donc :

$$\mathbb{R}^n\ =\ \mathrm{Ker}(f - \lambda_1\, \mathrm{Id}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\, \mathrm{Id}) \overset{\perp}{\oplus}\ \ \ldots\ \ \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(f - \lambda_p\, \mathrm{Id}).$$

On considère un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$, et on note $v = v_1 + v_2 + \ \ldots\ + v_p$ la décomposition de ce vecteur v sur ces sous-espaces propres supplémentaires et deux à deux orthogonaux.

2°) *Etude d'une suite de nombres réels* $k \longrightarrow \rho^{(k)}$

a) Démontrer la formule suivante :

$$\|f(v)\|^2\ =\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2\, \|v_i\|^2.$$

En déduire l'inégalité : $\lambda_1\, \|v\| \leq \|f(v)\| \leq \lambda_p\, \|v\|$.

b) Justifier la double inégalité suivante : $0 < \|f(v)\|^2 \leq \|v\| \left\|f^2(v)\right\|$.

c) On définit une suite de vecteurs $k \longrightarrow v^{(k)}$ et une suite de réels $k \longrightarrow \rho^{(k)}$ par $v^{(0)} = \frac{v}{\|v\|}$,

puis, pour tout entier naturel k par :

$$\rho^{(k)} = \left\|f\left(v^{(k)}\right)\right\| \qquad ; \qquad v^{(k+1)} = \frac{f\left(v^{(k)}\right)}{\left\|f\left(v^{(k)}\right)\right\|}.$$

Montrer que la suite $k \longrightarrow \rho^{(k)}$ est croissante et majorée par λ_p, puis qu'elle converge.

d) On se place dans le cas particulier où $v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$, où $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$.

Exprimer $v^{(k)}$ en fonction de v, et en déduire dans ce cas $\lim_{k \to +\infty} \rho^{(k)}$.

e) On se place dans le cas général où $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_p$ est tel que $v_p \neq 0$.

Exprimer $v^{(k)}$ en fonction de k, de $v_1, v_2, \ldots, v_p$ et de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

En déduire $\lim_{k \to +\infty} \rho^{(k)}$.

3°) *Mise en œuvre de l'algorithme précédent*

a) Ecrire un algorithme permettant le calcul des N premiers termes de la suite $k \longrightarrow \rho^{(k)}$ lorsque la matrice M et le vecteur v sont donnés.

b) On considère la matrice M_4 d'ordre 4 définie par :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer à l'aide de l'algorithme précédent des valeurs approchées des réels $\rho^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq 5$ dans les 4 cas suivants :

$v = e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v = e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $v = e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $v = e_4 = (0, 0, 0, 1)$.

Qu'en conclure?

■ Partie II : Valeurs propres des matrices $M_n = (\min(i, j))$

Comme on l'a indiqué plus haut, la matrice M_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont l'élément $m_{i\,j}$ est égal à $\min(i, j)$, plus petit des entiers i et j, et donc égale à :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

1°) *Etude d'une matrice auxiliaire A_n*

On considère l'endomorphisme a de $\mathbb{R}^n$ défini par les relations suivantes :

$$a(e_1) = e_1, \quad \ldots \quad, a(e_k) = e_1 + e_2 + \ldots + e_k, \quad \ldots \quad, a(e_n) = e_1 + e_2 + \ldots + e_n.$$

a) Ecrire la matrice A_n de l'endomorphisme a dans la base canonique $\mathcal{B}$.

Vérifier que celle-ci est inversible.

b) Exprimer $a^{-1}(e_1)$, et en formant $a(e_k) - a(e_{k-1})$ pour $2 \leq k \leq n$,exprimer $a^{-1}(e_k)$.

Ecrire la matrice A_n^{-1} de l'endomorphisme a^{-1} dans la base canonique $\mathcal{B}$.

2°) *Inversibilité de la matrice M_n*

a) Calculer le produit $M_n\, A_n^{-1}$, puis exprimer M_n en fonction de A_n.

b) Montrer, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, qu'on a ${}^t x\, M_n\, x = \|A_n\, x\|^2$.
En déduire que la matrice symétrique réelle M_n vérifie l'hypothèse $\mathcal{P}$.

c) Montrer que M_n est inversible, et exprimer M_n^{-1} en fonction de A_n^{-1}.
En déduire que :

$$M_n^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3°) *Valeurs propres de la matrice M_n^{-1}*

a) On considère un réel λ tel que $|2-\lambda| > 2$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\left(M_n^{-1} - \lambda\, I_n\right) x = 0$.
On suppose que i est un indice tel que $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$.
En examinant la $i^{\text{ème}}$ ligne du système $\left(M_n^{-1} - \lambda\, I_n\right) x = 0$, parvenir à une contradiction.
En déduire qu'on a $x = 0$ et que λ n'est pas valeur propre de M_n^{-1}.

b) Justifier le caractère réel des valeurs propres de la matrice M_n^{-1} et à l'aide de la question précédente, établir que les valeurs propres de M_n^{-1} appartiennent au segment $[0, 4]$.

c) Justifier, si λ est valeur propre de M_n^{-1}, qu'il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2 - 2\cos(\theta)$.
Montrer que $\lambda = 2 - 2\cos(\theta)$ est valeur propre de M_n^{-1} si et seulement si le déterminant d'ordre n suivant est nul :

$$\Delta_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 2\cos(\theta) & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2\cos(\theta) & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\cos(\theta) - 1 \end{vmatrix}.$$

d) Etablir la relation suivante pour tout entier $n \geq 3$:

$$\Delta_n(\theta) = 2\cos(\theta)\, \Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta).$$

Exprimer $\Delta_1(\theta)$ et $\Delta_2(\theta)$ et montrer qu'en posant $\Delta_0(\theta) = 1$, la relation ci-dessus reste vraie pour $n = 2$.

e) On suppose $\theta = \pi$, de sorte qu'on a la relation : $\Delta_n(\pi) + 2\,\Delta_{n-1}(\pi) + \Delta_{n-2}(\pi) = 0$.
Calculer $\Delta_n(\pi)$ et en déduire que $\lambda = 4$ n'est pas valeur propre de M_n^{-1}.

f) On suppose donc $0 \leq \theta < \pi$, de sorte que $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ n'est pas nul. Montrer qu'on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Delta_n(\theta) = \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

g) En déduire que les valeurs propres de M_n^{-1} sont les n nombres réels suivants :

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\left(\frac{(2\,k-1)\,\pi}{2\,n+1}\right) \quad \text{avec} \quad 1 \leq k \leq n.$$

4°) *Valeurs propres de la matrice M_n*

a) Etablir qu'il existe une matrice orthogonale P_n telle que $P_n^{-1}\, M_n^{-1}\, P_n = D_n$ où D_n est la matrice diagonale d'éléments diagonaux $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$.

b) En déduire l'expression de $P_n^{-1}\, M_n\, P_n$ et les valeurs propres de la matrice M_n.

c) Quelle est la plus grande valeur propre de la matrice M_4?
Préciser sa valeur numérique et confronter celle-ci au résultat obtenu en I.3.b.