

Concours EPITA 2012

Composition de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Durée : 2 heures

Usage de la calculatrice autorisé. Tous documents interdits.

Commande de voiliers robotisés

1. Présentation



Les changements climatiques récents, ainsi que la place prépondérante des océans dans ces changements engendrent une forte demande de la part des climatologues et des océanographes en données relatives aux océans. Des bateaux embarquant des systèmes de mesure ont été développés. Les bateaux à voile autonomes permettent de répondre à ces besoins d'exploration. Le voilier autonome présente pour avantages tout d'abord de répondre à ce cahier des charges scientifique mais aussi d'être très économe en énergie du fait de la force de propulsion venant du vent.

Dans ce cadre, des laboratoires de recherche de l'ENSTA Brest, de l'Ecole Centrale de Nantes ou l'Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique de l'Université Pierre et Marie Curie ont développé des voiliers autonomes, tant en terme de construction que d'algorithme de pilotage.

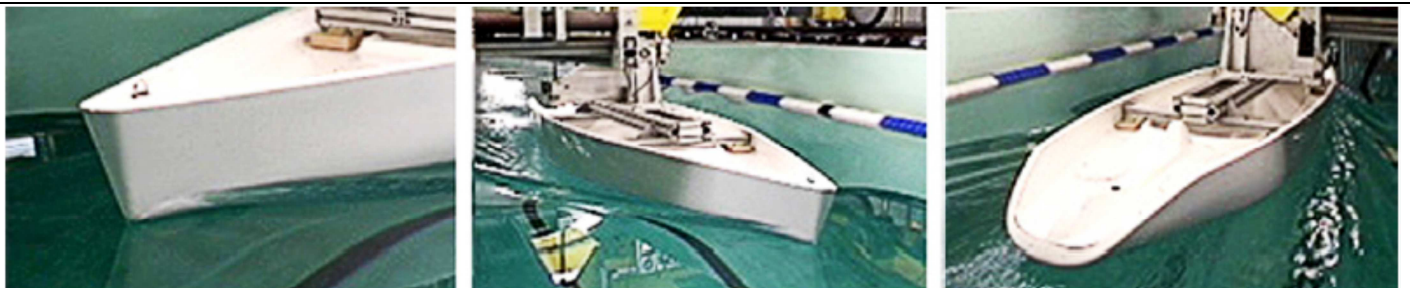


Figure 1 : Prototype de voilier dans le bassin de l'Ecole Centrale de Nantes.

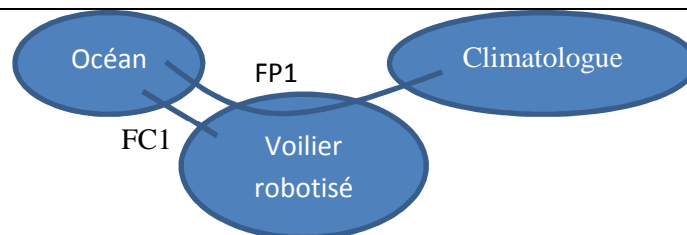


Figure 2 : Diagramme des interacteurs.

Fonction	Description	Critère	Niveau
FP1	Prendre le cap donné par	Précision de cap	Erreur statique nulle

	le climatologue	Stabilité	Pas d'oscillation
		Rapidité	Temps de réponse à 5% inférieur à 3 s.
FC1	Ne pas se coucher sur l'eau sous l'effet du vent	Vent de 50 km/h de travers	Angle formé par le mat et la verticale de 40° au maximum

L'objectif de cette étude est la vérification de certains aspects du cahier des charges.

2. Modèle hydrodynamique du voilier

2.1 Détermination de la masse du lest du voilier

On souhaite tout d'abord vérifier la fonction FC1. On se place dans le cas où le voilier est à l'équilibre et est soumis entre autres à l'action d'un vent de travers (voir Figure 3 : Description du voilier. Figure 3).

On modélise le voilier comme sur la Figure 3. Pour simplifier, la coque est supposée hémicylindrique. La voile est supposée plane et triangulaire isocèle.

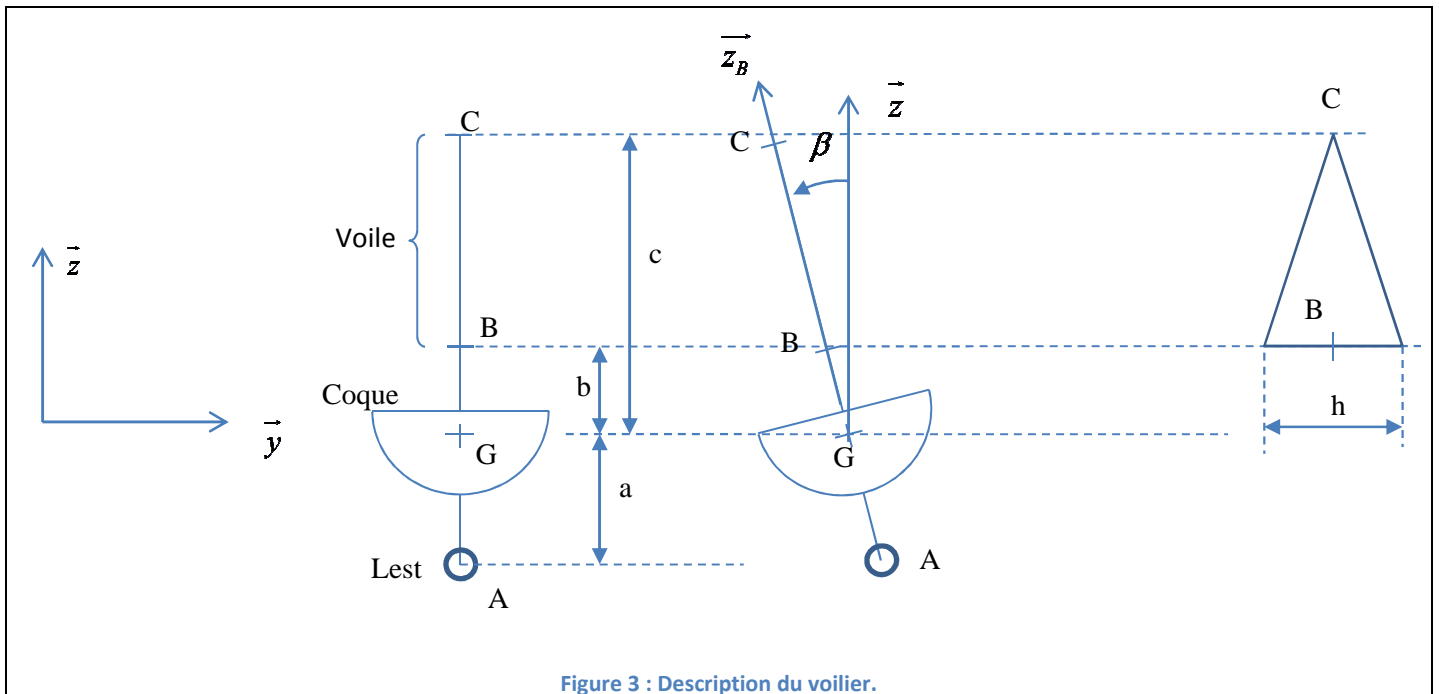


Figure 3 : Description du voilier.

On modélise l'action du vent par une répartition de pression uniforme p_0 sur toute la voile supposée plane. La force élémentaire sera notée $d\vec{F}_{\text{vent} \rightarrow \text{voile}} = -p_0 dS \vec{y}$. Sous l'effet de la force du vent sur la voile, le bateau tourne autour de l'axe (G, \vec{x}) d'un angle β . Le poids du lest (de masse m en A) équilibre l'action du vent de manière à ne pas faire chavirer le voilier.

Q1. On cherche à déterminer le torseur de l'action du vent en G en fonction de β , p_0 et des constantes dimensionnelles du problème. Pour cela :

- Déterminer l'élément de surface dS qui convient au calcul.
- Mettre en équation la résultante et le moment résultant de l'action du vent.
- Intégrer et donner le résultat.

Élément de surface : $dS = h \frac{c-z}{c-b} dz$

$$\text{Résultante : } \vec{R} = -\int_b^c p_0 dS \vec{y} = -\int_b^c p_0 h \frac{c-z}{c-b} dz \vec{y} = -\frac{p_0 h}{c-b} \int_b^c (c-z) dz \vec{y} = -p_0 h \frac{c-b}{2} \vec{y}$$

Moment en

$$\vec{M}_{G, \text{vent} \rightarrow \text{voile}} = \int_b^c z p_0 \cos \beta dS \vec{x} = \int_b^c p_0 h z \frac{c-z}{c-b} dz \cos \beta \vec{x} = \frac{p_0 h}{c-b} \cos \beta \int_b^c z(c-z) dz \vec{x} = p_0 h \cos \beta \frac{(c-b)(2b+c)}{6} \vec{x}$$

G

:

Q2. Déterminer le torseur de l'action du poids du lest en G.

$$\vec{M}_{G, \text{poidslest} \rightarrow \text{bateau}} = -m.g.a.\sin \beta \vec{x}$$

Q3. En déduire une relation entre la vitesse du vent et la masse du lest.

$$\text{Equation de moment en G : } p_0 h \cos \beta \frac{(c-b)(2b+c)}{6} - m.g.a.\sin \beta = 0$$

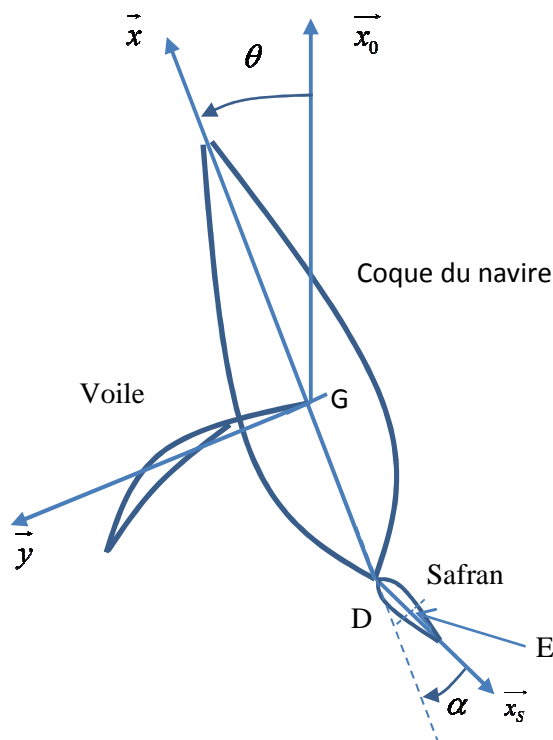
Q4. En déduire la masse du lest en accord avec le cahier des charges. Effectuer l'application numérique.

$$p_0 = 115 \text{ Pa}, h = 1 \text{ m}; c = 1,4 \text{ m}; b = 0,3 \text{ m}; a = 0,5 \text{ m}$$

$$m = \frac{p_0 h \cos \beta \frac{(c-b)(2b+c)}{6}}{g.a.\sin \beta} \quad \text{AN : } m = 10.2 \text{ kg}$$

2.2 Equation du mouvement en tenue de cap

On se place maintenant dans le cas où le navire est en mouvement par rapport à la Terre. On souhaite vérifier la fonction FP1. Nous allons tout d'abord proposer un modèle mathématique de l'évolution de l'angle de cap du voilier puis nous étudierons la commande de l'angle de safran dans la partie suivante.



Notations :

- Le vecteur \vec{x}_0 pointe vers le nord géographique de la Terre.
- Le vecteur \vec{x} pointe dans l'axe longitudinal du bateau.
- Le vecteur \vec{x}_v est dans la direction et dans le sens de la vitesse du vent par rapport à la Terre.
- Le vecteur \vec{x}_s est dans la direction du safran qui modifie le cap du navire.
- L'angle entre \vec{x}_0 et \vec{x} est appelé angle de cap φ .
- L'angle entre \vec{x}_s et $-\vec{x}$ est appelé l'angle de safran α .
- $\overline{DE} = \lambda \vec{x}_s$
- On note $I_{G(\text{navire})} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$ la matrice d'inertie du navire en G exprimée dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Hypothèses :

- Le référentiel lié à la Terre est supposé galiléen.
- Le safran est en liaison pivot d'axe (D, \vec{z}) avec la coque.
- Le voilier est soumis à :

- o L'action de la traînée la coque notée $T_{\text{eau} \rightarrow \text{voilier}} = \begin{Bmatrix} -T\vec{x} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -f\dot{\varphi} \end{Bmatrix}_G$;

- o L'action de l'eau sur le safran notée $T_{\text{eau} \rightarrow \text{safran voilier}} = \begin{Bmatrix} -S\vec{x} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_E$;

- o L'action du vent sur la voile notée $T_{\text{vent} \rightarrow \text{voilier}} = \begin{Bmatrix} P\vec{x} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$.

- o Les quantités T , S et P sont supposées constantes dans le temps.

Q5. Déterminer l'expression de la vitesse du vent apparent $\overrightarrow{V_{G, \text{vent}/\text{navire}}}$ en fonction de la vitesse du navire par rapport à la Terre $\overrightarrow{V_{G, \text{navire}/\text{Terre}}}$ et la vitesse du vent par rapport à la Terre $\overrightarrow{V_{G, \text{vent}/\text{Terre}}}$.

$$\overrightarrow{V_{G, \text{vent}/\text{navire}}} = \overrightarrow{V_{G, \text{vent}/\text{Terre}}} - \overrightarrow{V_{G, \text{navire}/\text{Terre}}}$$

Q6. Déterminer l'équation différentielle liant l'angle de cap φ et ses dérivées successives à l'angle de safran α . Linéariser la relation obtenue en supposant les angles petits.

On applique le PFD en moment autour de l'axe (G, \vec{z}) : $C\ddot{\varphi} = -f\dot{\varphi} + S\lambda \sin \alpha$

En linéarisant $C\ddot{\varphi} + f\dot{\varphi} = S\lambda\alpha$

3. Capteurs utilisés

Pour déterminer l'angle formé entre le navire et le vent ainsi que sa vitesse, on utilise une girouette et un anémomètre. Les deux dispositifs étant situés au sommet du mat.

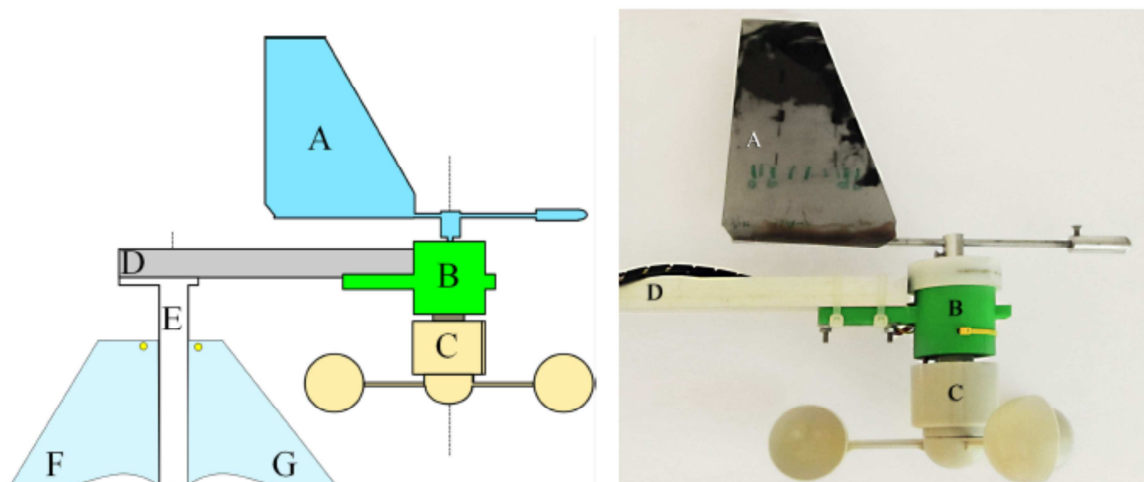


Figure 5 : Description de la girouette et de l'anémomètre. A : Aile de la girouette. B : capteur angulaire. C : Anémomètre à coupelles. D : Bras support. E : Mat. F et G : Voiles.

La girouette est équipée d'un capteur angulaire et l'anémomètre est équipé d'un capteur de vitesse de rotation.

Q7. Proposer une solution technique possible pour le capteur équipant la girouette.

On peut utiliser un capteur potentiométrique.

Q8. Proposer une solution technique possible pour le capteur équipant l'anémomètre.

On peut utiliser un capteur incrémental.

4. Asservissement de cap

4.1 Identification de la boucle ouverte

L'équation trouvée à la question Q6 donne dans le domaine de Laplace : $\frac{\varphi(p)}{\alpha(p)} = H(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + T \cdot p)}$.

On sollicite le système avec un échelon d'angle de safran $\alpha(p) = \frac{\alpha_0}{p}$ avec $\alpha_0 = 0,5 \text{ rad}$.

Domaine temporel	Transformée dans le domaine de Laplace
$u(t)$ (échelon unitaire)	$\frac{1}{p}$
$t \cdot u(t)$ (rampe unitaire)	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-a \cdot t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p + a}$

Q9 : Déterminer la réponse temporelle $\varphi(t)$.

$$\varphi(p) = \frac{K}{p \cdot (1+T \cdot p)} \alpha(p) = \frac{K}{p \cdot (1+T \cdot p)} \frac{\alpha_0}{p} = \frac{K \cdot \alpha_0}{p^2} - \frac{K \cdot \alpha_0 \cdot T}{p} + \frac{K \cdot \alpha_0 \cdot T}{p + \frac{1}{T}}$$

$$\varphi(t) = K \cdot \alpha_0 \cdot (t - T + e^{-t/T})$$

On en déduit

On donne l'évolution de l'angle de cap φ en fonction du temps Figure 6.

Q10 : Déterminer K et T.

L'asymptote nous donne T=1s et K=0,4.

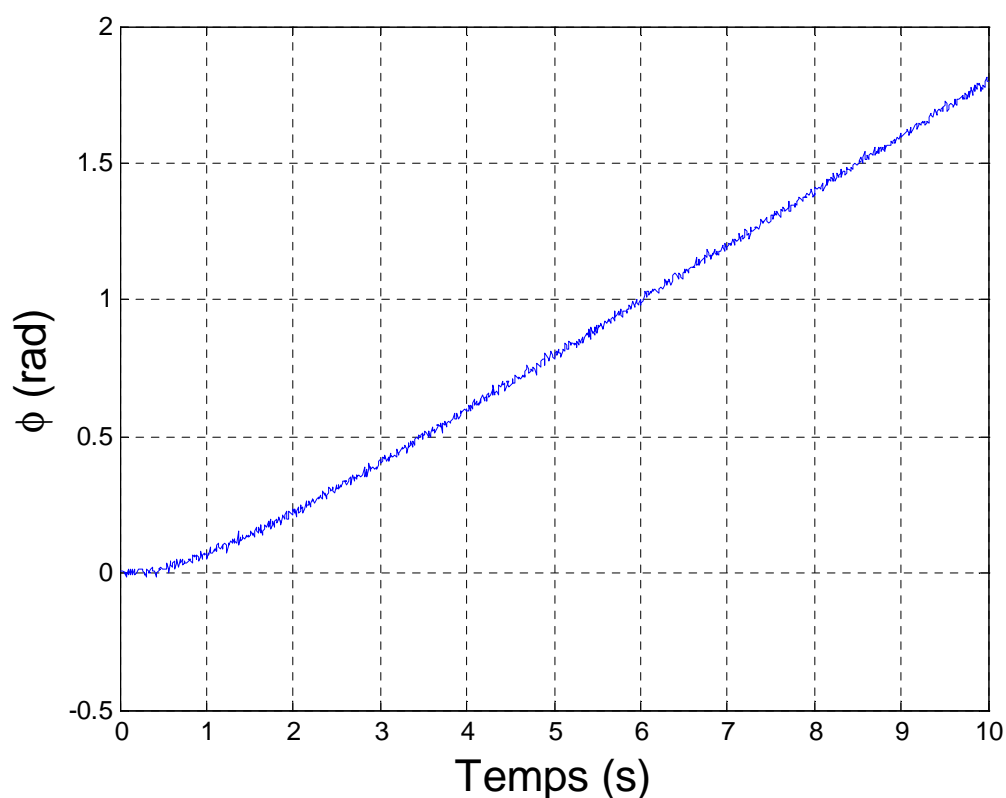
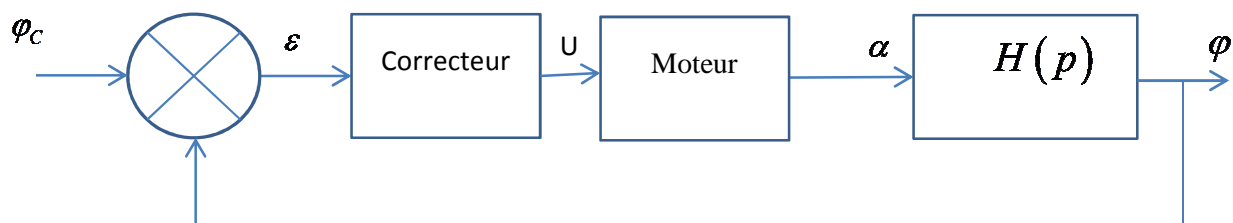


Figure 6 : Evolution de l'angle de cap en fonction du temps.

4.2 Détermination d'un correcteur répondant au cahier des charges.

On souhaite asservir l'angle de cap. Pour cela, met en place le système suivant :



φ_c est la consigne de cap. Le safran est actionné par un moteur électrique de fonction de transfert une constante $G=1$. Le correcteur a pour fonction de transfert $C(p)$.

Q11. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système.

$$\frac{\varphi}{\varphi_c} = \frac{G.C(p).K}{p.(1+T.p)+G.C(p).K}$$

On souhaite une réponse sans oscillation et avec un temps de réponse à 5% inférieur à 10s.

On envisage dans un premier temps un correcteur proportionnel de fonction de transfert $C(p) = C_0$.

Q12. Déterminer la fonction de transfert $\frac{\varphi}{\varphi_c}$ en fonction de C_0 , K et T en la mettant sous forme canonique.

$$\frac{\varphi}{\varphi_c} = \frac{G.C_0.K}{p.(1+T.p)+G.C_0.K} = \frac{G.C_0.K}{T.p^2 + p + G.C_0.K} = \frac{1}{\frac{T}{G.C_0.K} p^2 + \frac{p}{G.C_0.K} + 1}$$

Q13. Déterminer le gain statique G_0 , le coefficient d'amortissement ξ et la pulsation propre ω_0 de la fonction de transfert $\frac{\varphi}{\varphi_c}$.

Gain statique : $G_0 = 1$

$$\text{Pulsation propre : } \omega_0 = \sqrt{\frac{G.C_0.K}{T}}$$

$$\text{Coefficient d'amortissement : } \xi = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{G.C_0.K.T}}$$

Q14. En tenant compte critère de stabilité du cahier des charges, déterminer C_0 .

On veut un système sans oscillation, tout en étant le plus rapide possible. On doit donc avoir $\xi = 1$. On en déduit

$$C_0 = \frac{1}{4} \frac{1}{G.K.T}$$

On donne Figure 7 le diagramme donnant le temps de réponse réduit $T_{5\%}.\omega_0$ (où $T_{5\%}$ est le temps de réponse à 5% et ω_0 la pulsation propre) pour un système du second ordre.

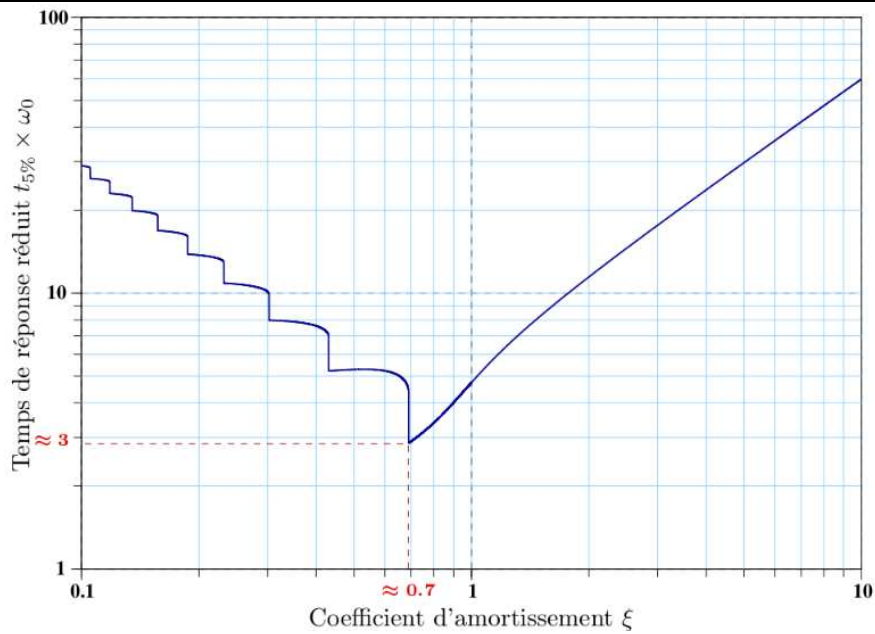


Figure 7 : Temps de réponse réduit d'un système du second ordre.

Q15. En déduire le temps de réponse à 5% du système avec la valeur de C_0 trouvée précédemment. Le cahier des charges est-il respecté ?

On trouve $T_{5\%} \cdot \omega_0 = 4,5$

On en déduit : $T_{5\%} = 9s$. Le Cahier des Charges n'est pas respecté.

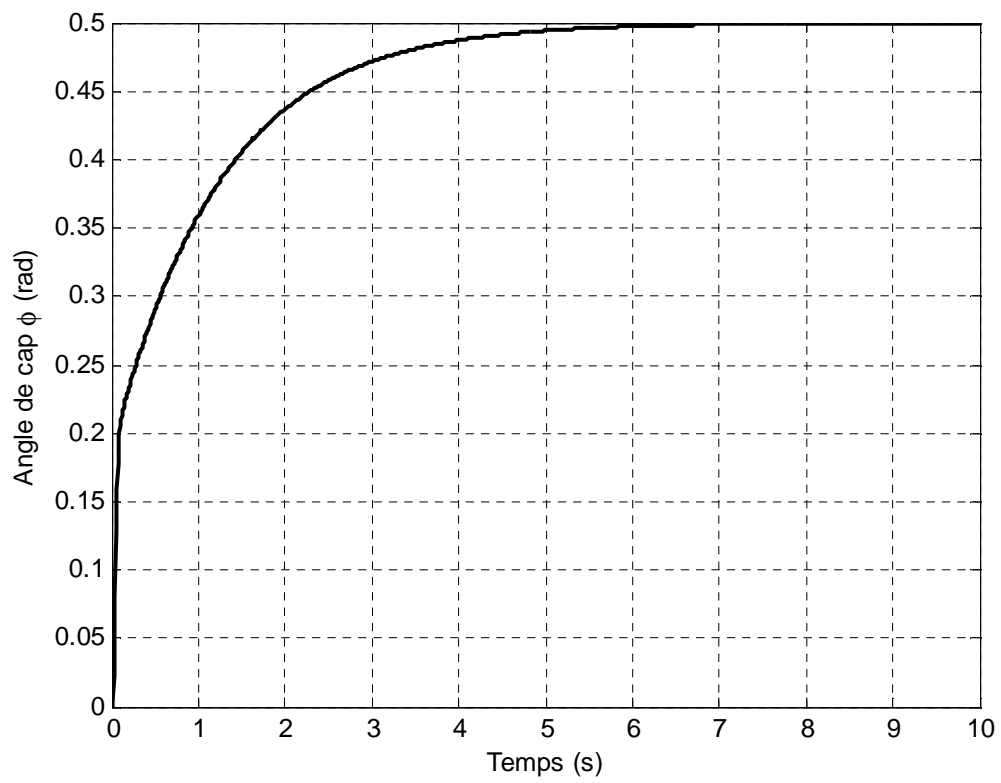
On envisage maintenant un correcteur de fonction de transfert $C(p) = C_0(1 + T_D p)$.

Q16. Déterminer la fonction de transfert $\frac{\varphi}{\varphi_c}$ en fonction de C_0 , K , T_D et T en la mettant sous forme canonique.

$$\frac{\varphi}{\varphi_c} = \frac{G.C_0(1+T_D p).K}{p.(1+T.p)+G.C_0(1+T_D p).K} = \frac{G.C_0.K(1+T_D p)}{T.p^2 + (1+T_D.G.C_0)p + G.C_0.K} = \frac{1+T_D p}{\frac{T}{G.C_0.K} \cdot p^2 + \frac{(1+T_D.G.C_0)}{G.C_0.K} p + 1}$$

On choisit les paramètres C_0 et T_D de manière à avoir la réponse temporelle à un échelon de consigne de cap de 0,5

rad.



Q17. Conclure sur la vérification du cahier des charges.

Le cahier des charges est vérifié.