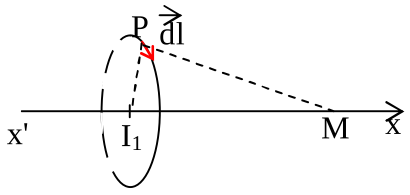
Etude d'un moteur synchrone

## I- Production d'un champ magnétique quasi uniforme

1)- Selon la loi de Biot et Savart, le champ créé sur l'axe au point M, par la spire s'écrit:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint_{(C)} \frac{\vec{dl}\wedge\vec{PM}}{PM^3}$$




2)- Au cours de l'intégration, la longueur PM reste constante: on peut donc sortir $PM^3$ de l'intégrale. Par ailleurs, $\vec{PM} = \vec{PI_1} + \vec{I_1M}$ .

L'expression précédente s'écrit donc:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi \cdot PM^3}\oint_{(C)} \vec{dl}\wedge\left(\vec{PI_1} + \vec{I_1M}\right)$$

On a donc dans l'expression de $\vec{B}_1$ la somme de deux intégrales:

$$\oint_{(C)} \vec{dl}\wedge\vec{PI_1} \quad \text{et} \quad \oint_{(C)} \vec{dl}\wedge\vec{I_1M}$$

Au cours de l'intégration, le vecteur $\vec{I_1M}$ reste constant. La seconde intégrale peut donc s'écrire:

$$\left[\oint_{(C)} \vec{dl}\right]\wedge\vec{I_1M}\text{, et } \oint_{(C)} \vec{dl} = 0 \quad \text{: la seconde intégrale est nulle.}$$

3)- Le champ magnétique en M s'écrit donc:

$$\vec{B_1} = \frac{\mu_0 i}{4\pi \cdot PM^3}\oint_{(C)} \vec{dl}\wedge\vec{PI_1}$$

Or, $\vec{dl}\wedge\vec{PI_1} = R\cdot dl\cdot\vec{u_x}$ ; $\vec{B}_1$ s'écrit donc:

$$\vec{B_1} = \frac{\mu_0 i\cdot R}{4\pi \cdot PM^3}\oint_{(C)} dl\cdot\vec{u_x}$$

Or, $\oint_{(C)} dl = 2\pi R$, et $PM^3 = \left(R^2 + x^2\right)^{3/2}$. On en déduit l'expression de $\vec{B}$ :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}\cdot\vec{u_x}$$

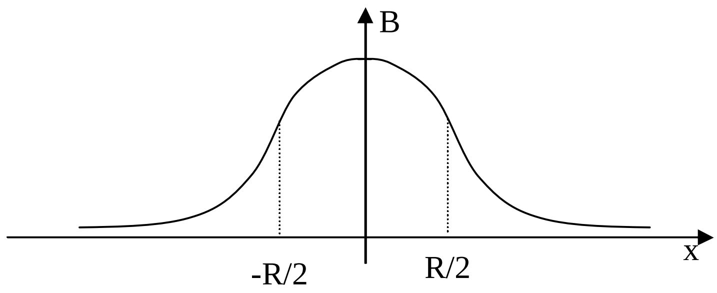
4)- Les deux dérivées première et seconde de y s'écrivent:

$$y' = \frac{d}{dx}\left(R^2+x^2\right)^{-3/2} = -\frac{3}{2}\left(R^2+x^2\right)^{-5/2}\cdot 2x\text{, soit:}$$

$$\boxed{y' = -3x\left(R^2+x^2\right)^{-5/2}}$$

$$y'' = -3\left(R^2+x^2\right)^{-5/2} + (-3x)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(R^2+x^2\right)^{-7/2}2x = 3\left(R^2+x^2\right)^{-7/2}\left[4x^2-R^2\right]\text{, soit:}$$

$$\boxed{y'' = 3\frac{4x^2-R^2}{\left(R^2+x^2\right)^{7/2}}}$$




y' est de signe contraire à x: y est croissante en x < 0, décroissante en x > 0, avec un extremum en x = 0.
On a par ailleurs deux points d'inflexion en $x = \frac{R}{2}$ et $x = -\frac{R}{2}$

5)- Au point O, le champ $\vec{B}$ est la somme de $\vec{B}_1$ en d/2 et de $\vec{B}_1$ en –d/2.
Les dérivées de B en ce point sont donc la somme des dérivées de $B_1$ en d/2 et –d/2.
Or, la fonction y étant paire, ses dérivées impaires sont impaires. On en déduit que toutes les dérivées impaires de B en O sont nulles.
Les dérivées paires, elles, sont paires: leur somme en d/2 et –d/2 n'est en général pas nulle. Toutefois, si on choisit d = R, les deux dérivées secondes en R/2 et –R/2 étant nulles, la dérivée seconde de B en O est alors nulle.
Dans un développement limité de B au voisinage de O, le premier terme non nul est alors celui du quatrième ordre (première dérivée non nulle en O).
On considérera alors que le champ en O est quasi uniforme.

## II- Production d'un champ tournant

1)- Le champ tournant proposé fait, à l'instant t, l'angle $\omega_0$t avec l'axe des x: on peut donc l'écrire:

$$\vec{B}_0 = B_0\left(\cos\omega_0 t\cdot\vec{u_x} + \sin\omega_0 t\cdot\vec{u_y}\right)$$

2)- Le champ $\vec{B_0}$ créé en O par les quatre spires s'écrit:

$$\vec{B_0} = \vec{B} + \vec{B}' = K\left(i\cdot\vec{u_x} + i'\cdot\vec{u_y}\right)$$

soit:

$$\vec{B_0} = K\cdot i_0\left[\cos\omega_0 t\cdot\vec{u_x} + \cos(\omega_0 t+\varphi)\cdot\vec{u_y}\right] = K\cdot i_0\left[\cos\omega_0 t\cdot\vec{u_x} + (\cos\omega_0 t\cdot\cos\varphi - \sin\omega_0 t\cdot\sin\varphi)\cdot\vec{u_y}\right]$$

Ce champ a bien la forme du champ tournant $\vec{B_0}$ proposé, à condition que l'on ait :

$$\cos\varphi = 0 \text{ et } \sin\varphi = -1 \text{ soit } \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ et } K\cdot i_0 = B_0$$

On obtient un champ tournant à condition que les courants i et i' soient en quadrature. (Le sens de rotation dépend du signe du déphasage.

## III- Moteur synchrone:

1)- Par définition, le moment du couple magnétique exercé par $\vec{B_0}$ sur le moment $\vec{\mu}$ s'écrit:

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mu}\wedge\vec{B_0}$$

Soit:

$$\vec{\Gamma} = \mu\cdot B_0\cdot\sin\left(\vec{\mu},\vec{B_0}\right)\cdot\vec{u}_z\text{, avec }\left(\vec{\mu},\vec{B_0}\right) = \omega_0 t - (\omega t - \alpha) = (\omega_0 - \omega)\cdot t + \alpha$$

d'où l'expression de Γ:

$$\Gamma = \mu\cdot B_0\cdot\sin\left[(\omega_0-\omega)\cdot t + \alpha\right]$$

2)- La valeur moyenne d'un sinus sur un nombre entier de périodes est nulle: le moment moyen du couple magnétique est donc nul, sauf si le sinus est invariant au cours du temps, c'est-à-dire si $\omega = \omega_0$. Dans ces conditions, la valeur moyenne du moment du couple s'écrit:

$$\langle\Gamma\rangle = \mu \cdot B_0 \cdot \sin\alpha = \mu \cdot Ki_0 \cdot \sin\alpha$$

3)- On veut que le couple magnétique soit moteur: c'est réalisé si sa puissance moyenne est positive. Cette puissance s'écrit:

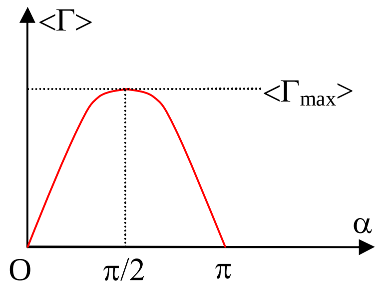
$$\langle P\rangle = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}_0 = \Gamma \cdot \omega_0$$

soit:

$$\langle P\rangle = \mu \cdot Ki_0 \cdot \omega_0 \sin\alpha$$

Le couple moyen est donc moteur si $\omega_0$ et $\alpha$ sont de même signe, c'est-à-dire si le dipôle magnétique tourne avec un retard sur le champ tournant, compris en valeur absolue entre 0 et $\pi$.

4)- Dans le cas où $\omega_0$ est positif; la courbe représentant $\Gamma$ en fonction de $\alpha$ a l'allure suivante:




Le couple maximum est obtenu pour $\sin\alpha = 1$. Sa valeur s'écrit:

$$\langle\Gamma_{\max}\rangle = \mu \cdot Ki_0\omega_0$$

5)- Le rotor tourne à vitesse constante: le moment résultant par rapport à l'axe des forces appliquées doit être nul. Si $\Gamma_r$ est le moment des forces résistantes par rapport à l'axe, on doit avoir:

$$\langle\Gamma\rangle + \Gamma_r = 0$$

soit: $\Gamma_r = -\langle\Gamma\rangle$ , et comme le couple moyen est positif, $|\Gamma_r| = \langle\Gamma\rangle$. Le fonctionnement n'est possible que si $|\Gamma_r| < \langle\Gamma_{\max}\rangle$.

Dans ces conditions, on obtient graphiquement deux points de fonctionnement $\alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ et $\alpha_2 > \frac{\pi}{2}$.

6)- Au voisinage du point de fonctionnement, on augmente très légèrement la valeur absolue du couple résistant: le rotor ralentit légèrement, et $\alpha$ augmente.

Entre 0et $\frac{\pi}{2}$, la courbe $\langle\Gamma\rangle = f(\omega)$ est croissante: le couple moteur augmente donc, et le rotor se stabilise donc à sa vitesse constante. Le même raisonnement pour une petite diminution en valeur absolue du couple résistant montre qu'elle entraîne une diminution du couple moteur :
Le fonctionnement est donc stable dans ce domaine.
Le même raisonnement montre que le second point de fonctionnement est instable.

## I- Etude de l'orbite circulaire

1)- Si $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire radial, la force de gravitation exercée sur le satellite s'écrit:

$$\vec{F} = -G\frac{M \cdot m}{(R+h)^2} \cdot \overrightarrow{u_r}$$

Cette force dérive du potentiel $E_p$ : $\vec{F} = \overrightarrow{gradE_p} = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \cdot \overrightarrow{u_r}$ . On en déduit:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{(R+h)}$$ en prenant conventionnellement $E_p = 0$ à l'infini.

A la surface de la terre:

$$mg_0 = G\frac{M \cdot m}{R^2}\text{, soit: } GM = g_0 R^2$$

La force et l'énergie potentielle dont elle dérive peuvent donc s'écrire:

$$\vec{F} = -mg_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} \cdot \overrightarrow{u_r} \text{ et } E_p = -mg_0 \frac{R^2}{(R+h)}$$

2)- La vitesse du satellite s'écrit en coordonnées polaires:

$\vec{v} = \dot{r} \cdot \overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta} \cdot \overrightarrow{u_\theta}$ pour le mouvement circulaire, r est constant: $\vec{v} = r\dot{\theta} \cdot \overrightarrow{u_\theta}$

et l'accélération:

$\vec{a} = \dot{r}\dot{\theta} \cdot \overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta} \cdot \overrightarrow{u_\theta} - r\dot{\theta}^2 \cdot \overrightarrow{u_r}$ soit, pour le mouvement circulaire: $\vec{a} = r\ddot{\theta} \cdot \overrightarrow{u_\theta} - r\dot{\theta}^2 \cdot \overrightarrow{u_r}$

3)- La RFD appliquée au satellite s'écrit:

$$-mg_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} \cdot \overrightarrow{u_r} = mr\ddot{\theta} \cdot \overrightarrow{u_\theta} - mr\dot{\theta}^2 \cdot \overrightarrow{u_r}$$

On en déduit que $\ddot{\theta} = 0$, donc que la vitesse a un module $v_0 = r\dot{\theta}$ constant.

En remarquant que $r\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{r}$, la RFD s'écrit:

$$\frac{v_0^2}{r} = \frac{g_0 R^2}{r^2} \text{soit, avec } r = R+h: \ v_0 = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{R+h}}$$

Soit, pour h = 8000 km:

$$v_0 = 5,28 \text{ km/s}$$

4)- L'énergie mécanique $E$ est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mg_0 R^2}{R+h}$$

Soit, en explicitant l'expression de $v_0$:

$$E = -\frac{mg_0 R^2}{2(R+h)}$$

5)- La période du satellite est le temps mis pour effectuer une révolution, soit pour parcourir la distance $2\pi(R+h)$ à la vitesse de module constant $v_0$: on a donc:

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v_0}$$

Soit, numériquement:

$$T = 17136 \text{ s} = 4\text{h } 45 \text{ mn } 35 \text{ s}$$

## II- Mise sur orbite:

1)- Le satellite peut partir à l'infini à partir du moment où son énergie mécanique est nulle: on lui donne donc à l'altitude h une vitesse $v_L$ telle que:

$$\frac{1}{2}mv_L^2 - \frac{mg_0R^2}{(R+h)} = 0$$

D'où l'expression de $v_L$ :

$$v_L = \sqrt{\frac{2g_0R^2}{R+h}}$$

Soit, en fonction de $v_0$ :

$$v_L = v_0\sqrt{2}$$

Numériquement:

$$v_L = 7,47 \ \text{km.s}^{-1}$$

2)- Pour un mouvement de trajectoire elliptique de demi grand axe a, l'énergie mécanique s'écrit:

$$E = -\frac{mg_0R^2}{2a}$$

Dans le cas limite qui nous intéresse,la distance au centre de la terre est $R+h$ à l'apogée, et R au périgée. On a donc:

$$2a = 2R + h$$

Le satellite doit donc avoir une énergie:

$$E = -\frac{mg_0R^2}{2R+h}$$

Qui lui est communiquée à l'altitude R+h, au moment de la mise sur orbite à la vitesse $v_1$ :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{mg_0R^2}{R+h} = -\frac{mg_0R^2}{2R+h}$$

On en déduit:

$$v_1^2 = 2g_0R^2\left[\frac{1}{R+h} - \frac{1}{2R+h}\right]$$

C'est-à-dire:

$$v_1 = \sqrt{2g_0R^2\frac{R}{(R+h)(2R+h)}} = v_0\sqrt{\frac{2R}{2R+h}}$$

Numériquement:

$$v_1 = 4,14 \ \text{km.s}^{-1}$$

## III- Lancement du satellite:

1)- A partir de l'altitude a où ses moteurs sont coupés, le satellite a une énergie constante: on écrit donc l'égalité entre son énergie au point d'altitude a et celle au point d'altitude h qui est l'apogée de la trajectoire de lancement:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - m\frac{g_0R^2}{R+a} = \frac{1}{8}mv_0^2 - m\frac{g_0R^2}{R+h}$$

On en déduit l'expression de la vitesse $v_i$ :

$$v_i^2 = \frac{1}{4}v_0^2 + 2g_0R^2\left[\frac{1}{R+a} - \frac{1}{R+h}\right]$$

Soit la valeur numérique:

$$v_i = 8,64 \text{ km.s}^{-1}$$

2)- Au cours de la trajectoire elliptique, il y a conservation du moment cinétique.

A l'altitude a, la vitesse fait l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ avec la direction radiale: le moment cinétique s'écrit:

$$\sigma = (R + a) \cdot v_i \cdot \cos\alpha$$

A l'altitude h, le satellite a la vitesse $\frac{v_0}{2}$; comme on est à l'apogée de la trajectoire, cette vitesse est orthoradiale, et le moment cinétique s'écrit:

$$\sigma = (R + h) \cdot \frac{v_0}{2}$$

L'écriture de la conservation du moment cinétique conduit à:

$$(R + a) v_i \cdot \cos\alpha = (R + h) \frac{v_0}{2}$$

D'où:

$$\cos\alpha = \frac{R + h}{R + a} \frac{v_0}{2 v_i}$$

L'application numérique conduit à:

$$\alpha = 44°20'$$