Corrigé de l'épreuve I

Recherche de la plus grande valeur propre et étude des matrices $M_n = (\min(i,\ j))$

■ Partie I : Un algorithme de calcul de la plus grande valeur propre

1°) *Quelques propriétés de l'endomorphisme f*

a) Si y est le vecteur de composantes $(y_1,\ \dots,\ y_n)$ dans la base canonique, le vecteur $f(y)$ a pour composantes My, et on a donc $\langle x,\ f(y)\rangle = {}^t x\,(My) = {}^t x\,M\,y$.

Par conséquent, on a $\langle f(x),\ y\rangle = \langle y,\ f(x)\rangle = {}^t y\,M\,x$, et quitte à transposer en tenant compte de la symétrie de la matrice M, on a :

$$\langle f(x),\ y\rangle = {}^t y\,M\,x = {}^t x\,M\,y = \langle x,\ f(y)\rangle.$$

b) En appliquant ceci à des vecteurs propres x et y de f associés à λ et μ, on a donc :

$$\lambda\,\langle x,\ y\rangle = \langle f(x),\ y\rangle = \langle x,\ f(y)\rangle = \mu\,\langle x,\ y\rangle.$$

On en déduit que $(\lambda - \mu)\,\langle x,\ y\rangle = 0$, d'où $\langle x,\ y\rangle = 0$ si $\lambda \neq \mu$. Ainsi donc, les sous-espaces propres de f associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

c) La matrice M étant symétrique réelle est diagonalisable, et comme c'est la matrice de l'endomorphisme f, celui-ci est donc diagonalisable. Il en résulte que la somme directe des sous-espaces propres de f est égale à $\mathbb{R}^n$, et comme on l'a vu, ceux-ci sont orthogonaux.

d) Considérons une valeur propre λ de f et x un vecteur propre (non nul) associé à λ.
La propriété $\mathcal{P}$ montre que : $\lambda\,\langle x,\ x\rangle = \langle x,\ f(x)\rangle = {}^t x\,M\,x > 0$.
On en déduit que $\lambda = \langle x,\ f(x)\rangle \big/ \|x\|^2$, et λ est strictement positif.

2°) *Etude d'une suite de nombres réels* $k \longrightarrow \rho^{(k)}$

a) L'écriture $v = v_1 + v_2 + \dots + v_p$ est la décomposition du vecteur v sur la somme directe des sous-espaces propres de f, ce qui implique $f(v) = \lambda_1\,v_1 + \lambda_2\,v_2 + \dots + \lambda_p\,v_p$.

Comme les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux, on a par le théorème de Pythagore les relations suivantes :

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2 \qquad ; \qquad \|f(v)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2\,\|v_i\|^2.$$

Comme $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$, il en résulte que $\lambda_1\,\|v\| \le \|f(v)\| \le \lambda_p\,\|v\|$.

b) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\|f(v)\|^2 = \langle f(v),\ f(v)\rangle = \left\langle v,\ f^2(v)\right\rangle \le \|v\|\,\left\|f^2(v)\right\|.$$

c) L'inégalité $\rho^{(k)} \le \rho^{(k+1)}$ équivaut à $\left\|f\left(v^{(k)}\right)\right\| \le \left\|f\left(v^{(k+1)}\right)\right\|$, c'est à dire à :

$$\left\|f\left(v^{(k)}\right)\right\| \le \left\|f\left(v^{(k+1)}\right)\right\| = \left\|\frac{f^2\left(v^{(k)}\right)}{\left\|f\left(v^{(k)}\right)\right\|}\right\| \qquad \text{ou} \qquad \left\|f\left(v^{(k)}\right)\right\|^2 \le \left\|f^2\left(v^{(k)}\right)\right\|.$$

Comme $v^{(k+1)}$ est unitaire par définition, cette inégalité résulte aussitôt de (b) qui donne :

$$\left\|f\left(v^{(k)}\right)\right\|^2 \leq \left\|v^{(k)}\right\| \left\|f^2\left(v^{(k)}\right)\right\| = \left\|f^2\left(v^{(k)}\right)\right\|.$$

D'autre part, comme $v^{(k)}$ est unitaire, on a d'après (a) : $\rho^{(k)} = \left\|f\left(v^{(k)}\right)\right\| \leq \lambda_p \left\|v^{(k)}\right\| = \lambda_p$.
Ainsi, la suite $k \longrightarrow \rho^{(k)}$ est croissante majorée et converge.

d) Si $v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$, on a $f(v) = \lambda\, v$, donc $v^{(1)} = \frac{f(v)}{\|f(v)\|} = \frac{v}{\|v\|} = v^{(0)}$ puisque $\lambda > 0$.
Par récurrence immédiate, on établit que $v^{(k)} = v^{(0)}$, et la suite $k \longrightarrow v^{(k)}$ est constante.
On a donc $f\left(v^{(k)}\right) = \lambda\, v^{(k)}$, d'où $\rho^{(k)} = \lambda$ et la suite $k \longrightarrow \rho^{(k)}$ est constante égale à λ.

e) On se place dans le cas général où $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_p$ est tel que $v_p \neq 0$.
On a donc $f(v) = \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \ldots + \lambda_p\, v_p$, et par conséquent :

$$v^{(1)} = \frac{f(v)}{\|f(v)\|} = \frac{\lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \ldots + \lambda_p\, v_p}{\sqrt{\lambda_1^2\, \|v_1\|^2 + \lambda_2^2\, \|v_2\|^2 + \ldots + \lambda_p^2\, \|v_p\|^2}}.$$

De même, on a :

$$v^{(2)} = \frac{f\left(v^{(1)}\right)}{\left\|f\left(v^{(1)}\right)\right\|} = \frac{\lambda_1^2\, v_1 + \lambda_2^2\, v_2 + \ldots + \lambda_p^2\, v_p}{\sqrt{\lambda_1^4\, \|v_1\|^2 + \lambda_2^4\, \|v_2\|^2 + \ldots + \lambda_p^4\, \|v_p\|^2}}.$$

On vérifie alors facilement par récurrence que :

$$v^{(k)} = \frac{\lambda_1^k\, v_1 + \lambda_2^k\, v_2 + \ldots + \lambda_p^k\, v_p}{\sqrt{\lambda_1^{2k}\, \|v_1\|^2 + \lambda_2^{2k}\, \|v_2\|^2 + \ldots + \lambda_p^{2k}\, \|v_p\|^2}}.$$

On en déduit immédiatement $f\left(v^{(k)}\right)$, sa norme $\rho^{(k)}$, et comme $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_p$, on a :

$$\rho^{(k)} = \frac{\sqrt{\lambda_1^{2k+2}\, \|v_1\|^2 + \lambda_2^{2k+2}\, \|v_2\|^2 + \ldots + \lambda_p^{2k+2}\, \|v_p\|^2}}{\sqrt{\lambda_1^{2k}\, \|v_1\|^2 + \lambda_2^{2k}\, \|v_2\|^2 + \ldots + \lambda_p^{2k}\, \|v_p\|^2}} \sim \frac{\lambda_p^{k+1}\, \|v_p\|}{\lambda_p^k\, \|v_p\|} = \lambda_p.$$

Ainsi donc, dans le cas général, la suite $k \longrightarrow \rho^{(k)}$ converge vers $\lambda_p = \max(\mathrm{Sp}(f))$.

3°) *Mise en œuvre de l'algorithme précédent*
a) L'algorithme suivant renvoie les valeurs $\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(N)}$:

```
Entrer l'entier n, la matrice M, le vecteur v, l'entier N ;
Pour k de 0 à N, faire :
    Effectuer le produit matriciel w = M v;
    ρ := ||w|| ; v := w/ρ;
    Ecrire ρ ;
Fin ;
```

De façon plus détaillée :

Entrer l'entier n, la matrice $M = (m_{i\,j})$, le vecteur $v = (v_1, \ \dots, v_n)$, l'entier N ;
Pour k de 0 à N, faire :
    Pour i de 1 à n, faire :
        $w_i := 0$;
        Pour j de 1 à n, faire :
            $w_i := w_i + m_{i\,j}\, v_j$;
    $S := 0$;
    Pour i de 1 à n, faire :
        $S := S + w_i^2$;
    $\rho := \sqrt{S}$;
    Ecrire ρ ;
    Pour i de 1 à n, faire :
        $v_i := w_i / \rho$;
Fin ;

b) Avec M_4, le programme *Maple* décrit dans l'annexe donne, avec les quatre vecteurs de la base canonique : $\rho^{(3)} = 8.290\ \dots$, $\rho^{(4)} = 8.29085\ \dots$, $\rho^{(5)} = 8.2908593\ \dots$
Comme la matrice M_4 est symétrique réelle et vérifie la propriété $\mathcal{P}$, sa plus grande valeur propre est donc approximativement égale à 8.2908593 ...

■ Partie II : Valeurs propres des matrices M_n

1°) *Etude d'une matrice auxiliaire A_n*
a) L'endomorphisme a défini par les relations $a(e_k) = e_1 + e_2 + \ \dots\ + e_k$ a pour matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a pour déterminant 1 et est inversible. Ainsi, a est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Comme $a(e_1) = e_1$, on a $a^{-1}(e_1) = e_1$ et comme on a $a(e_k) - a(e_{k-1}) = e_k$ si $2 \le k \le n$, on obtient $a^{-1}(e_k) = e_k - e_{k-1}$, et la matrice A_n^{-1} de l'endomorphisme a^{-1} est :

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2°) *Inversibilité de la matrice M_n*

a) Calculons le produit matriciel $M_n A_n^{-1}$:

$$M_n A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = {}^t A_n.$$

On en déduit que $M_n = {}^t A_n\, A_n$.

b) On a donc ${}^t x\, M_n\, x = {}^t x\, {}^t A_n\, A_n\, x = {}^t (A_n\, x)\, (A_n\, x) = \|A_n\, x\|^2$.

Il en résulte qu'on a ${}^t x\, M_n\, x = \|A_n\, x\|^2 \geq 0$, et si ${}^t x\, M_n\, x = 0$, alors $A_n\, x = 0$ et comme A_n est inversible, il en résulte que $x = 0$. On en déduit que pour $x \neq 0$, alors ${}^t x\, M_n\, x > 0$. Ainsi, la matrice symétrique réelle M_n vérifie bien la propriété $\mathcal{P}$.

c) Comme $M_n = {}^t A_n\, A_n$ est produit de deux matrices inversibles, elle est inversible et on a :

$$M_n^{-1} = \left({}^t A_n\, A_n\right)^{-1} = A_n^{-1}\, {}^t A_n^{-1}.$$

On en déduit que :

$$M_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3°) *Valeurs propres de la matrice M_n^{-1}*

a) Si λ est un réel tel que $|2 - \lambda| > 2$, si $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur tel que $\left(M_n^{-1} - \lambda\, I_n\right) x = 0$, et :

- si un indice i tel que $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$ vérifie $1 \leq i < n$, on a :

  $$(2 - \lambda)\, x_i = x_{i-1} + x_{i+1}.$$

  Il en résulte que $|2 - \lambda|\, |x_i| \leq |x_{i-1}| + |x_{i+1}| \leq 2\, |x_i|$.

  Si x est non nul, on a $|x_i| > 0$ et donc $|2 - \lambda| \leq 2$, ce qui est contradictoire.

- si le seul indice i tel que $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$ est $i = n$, on a :

  $$(1 - \lambda)\, x_n = x_{n-1}, \quad \text{et} \quad (2 - \lambda)\, x_n = x_{n-1} + x_n.$$

  Il en résulte que $|2 - \lambda|\, |x_n| \leq |x_{n-1}| + |x_n| \leq 2\, |x_n|$.

  Si x est non nul, on a $|x_n| > 0$ et donc $|2 - \lambda| \leq 2$, ce qui est contradictoire.

Ainsi donc, si $|2 - \lambda| > 2$, l'égalité $\left(M_n^{-1} - \lambda\, I_n\right) x = 0$ implique $x = 0$, ce qui signifie que λ n'est pas valeur propre de M_n^{-1}.

b) Comme M_n^{-1} est symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles, et comme on a vu qu'elles ne peuvent vérifier $|2 - \lambda| > 2$, elles sont telles que $|2 - \lambda| \leq 2$ et appartiennent donc au segment $[0, 4]$.

c) Comme la fonction $\theta \longrightarrow 2 - 2\cos(\theta)$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[0, 4]$, on déduit que les valeurs propres de M_n^{-1} s'écrivent nécessairement $\lambda = 2 - 2\cos(\theta)$ avec $0 \le \theta \le \pi$. Maintenant, λ est valeur propre de M_n^{-1} si et seulement s'il existe $x \ne 0$ tel que $M_n^{-1}\, x = \lambda\, x$ et donc si et seulement si $M_n^{-1} - \lambda\, I_n$ est non inversible, soit $\det\left(M_n^{-1} - \lambda\, I_n\right) = 0$, ou :

$$\det\left(M_n^{-1} - (2 - 2\cos(\theta))\, I_n\right) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 2\cos(\theta) & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2\cos(\theta) & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\cos(\theta) - 1 \end{vmatrix}.$$

d) Le développement de ce déterminant $\Delta_n(\theta)$ par rapport à sa première ligne donne :

$$\Delta_n(\theta) = 2\cos(\theta)\, \Delta_{n-1}(\theta) - \Delta_{n-2}(\theta).$$

Il est clair que $\Delta_1(\theta) = 2\cos(\theta) - 1$ et $\Delta_2(\theta) = 4\cos^2(\theta) - 2\cos(\theta) - 1$, de sorte qu'on a :

$$\Delta_0(\theta) = 2\cos(\theta)\, \Delta_1(\theta) - \Delta_2(\theta) = 1.$$

e) Si $\theta = \pi$, on a $\Delta_n(\pi) + 2\,\Delta_{n-1}(\pi) + \Delta_{n-2}(\pi) = 0$, et l'équation caractéristique $(x+1)^2 = 0$ ayant -1 pour racine double, on a $\Delta_n(\pi) = (-1)^n\,(\alpha\, n + \beta)$ et avec les valeurs de $\Delta_0(\pi) = 1$ et $\Delta_1(\pi) = -3$, on obtient $\Delta_n(\pi) = (-1)^n\,(2\,n + 1)$ et $\Delta_n(\pi)$ n'étant jamais nul, on en déduit que $\lambda = 2 - 2\cos(\pi) = 4$ n'est pas valeur propre de M_n^{-1}.

f) Si $\theta \ne \pi$, donc si $0 \le \theta < \pi$, vérifions la formule proposée.
Celle-ci est vraie si $n = 0$ et si $n = 1$ car l'égalité $2\cos(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donne :

$$\Delta_1(\theta) = 2\cos(\theta) - 1 = \frac{\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Supposons qu'on ait pour $0 \le k \le n - 1$ l'égalité $\Delta_k(\theta) = \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta\right) \Big/ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On a alors :

$$\Delta_n(\theta) = 2\cos(\theta)\, \frac{\cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

g) Les valeurs propres de M_n^{-1} sont les réels $\lambda = 2 - 2\cos(\theta)$ avec $\Delta_n(\theta) = 0$ et $0 \le \theta < \pi$. L'égalité $\Delta_n(\theta) = 0$ étant équivalente à $\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$, soit $\theta = \frac{2k+1}{2n+1}\,\pi$ avec $0 \le k < n$ ou $\theta = \frac{2k-1}{2n+1}\,\pi$ avec $1 \le k \le n$, les valeurs propres de M_n^{-1} sont :

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\left(\frac{(2\,k - 1)\,\pi}{2\,n + 1}\right) \quad \text{avec} \quad 1 \le k \le n.$$

4°) *Valeurs propres de la matrice* M_n

a) Comme M_n^{-1} est symétrique réelle, il existe $P_n \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P_n^{-1}\, M_n^{-1}\, P_n = D_n$ est diagonale, avec $D_n = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

b) Par passage à l'inverse, on a $P_n^{-1}\, M_n\, P_n = D_n^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ \dots, \lambda_n^{-1}\right)$.
Les valeurs propres de M_n sont donc les n nombres réels suivants :

$$\mu_k = \frac{1}{2 - 2\cos\left(\frac{(2\,k-1)\,\pi}{2\,n+1}\right)} = \frac{1}{4\sin^2\left(\frac{2\,k-1}{2\,n+1}\ \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{avec} \quad 1 \leq k \leq n.$$

La plus grande de ces valeurs propres est donc $1 / 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2\,(2\,n+1)}\right)$.

Pour $n = 4$, c'est donc $\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{18}\right)} = 8,\ 29\,085\,936\ \dots$ et on retrouve bien la valeur approchée obtenue à la fin de la partie I.