E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (2 h)

■ Partie I : Etude d'une suite de nombres réels

On étudie dans cette partie la suite réelle définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \frac{1}{n} \qquad \left(\text{et donc } u_1 = \frac{1}{2}\right).$$

1°) *Un algorithme de calcul de u_n*

a) Simplifier le rapport u_{n+1} / u_n pour $n \geq 1$, puis préciser le sens de variation de $n \longrightarrow u_n$.

b) En déduire un algorithme de calcul des réels $u_1, u_2, \ldots, u_N$ lorsque l'entier N est donné.

c) On suppose donné un algorithme PGCD(a, b) renvoyant le PGCD de deux entiers a et b. Comment modifier l'algorithme précédent afin d'obtenir $u_1, u_2, \ldots, u_N$ sous la forme de fractions irréductibles?

2°) *Recherche d'un équivalent de u_n*

On introduit la suite auxiliaire (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^{3/2}\, u_n$.

a) Donner une expression simplifiée de $\varepsilon_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ pour $n \geq 1$.
En déduire un équivalent de ε_n quand n tend vers $+\infty$.

b) Etablir que la série $\sum \varepsilon_n$ est convergente (on notera sa somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n$).
En déduire que la suite $n \longrightarrow \ln(v_n)$ converge vers un réel qu'on exprimera à l'aide de S, puis donner un équivalent de u_n en fonction de S et de n.

3°) *Recherche d'un encadrement de u_n*

On rappelle que l'intégrale de Wallis W_n est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, \mathrm{d}t.$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer W_n en fonction de W_{n-2} pour $n \geq 2$.
(On pourra à cet effet écrire $\cos^n(t) = \cos(t) \cos^{n-1}(t)$).

b) En déduire que la suite $n \longrightarrow n\, W_n\, W_{n-1}$ est constante (on précisera cette constante), puis, en déterminant le sens de variation de la suite $n \longrightarrow W_n$, en déduire que :

$$\frac{\pi}{2\,(n+1)} \leq W_n^2 \leq \frac{\pi}{2\,n}.$$

c) A l'aide de la relation exprimant W_{2n} en fonction de W_{2n-2} pour $n \geq 1$, déterminer l'expression de W_{2n} en fonction de n, puis en fonction de $(n+1)\, u_{n+1}$.

d) En déduire un encadrement simple de u_n pour $n \geq 2$, puis donner un équivalent de u_n.
Quelle est la valeur de la constante S introduite à la question 2.b?

■ Partie II : Une extension du théorème de Weierstrass

On désigne ici par ϕ la solution définie sur]-1, 1[du problème de Cauchy suivant :

$$2\,(1-x)\,y' + y = 1 \qquad \text{et} \qquad y(0) = 0.$$

4°) *Expression analytique de la solution* ϕ

a) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $2\,(1-x)\,y' + y = 1$ sur]-1, 1[.

b) En déduire l'expression de l'unique solution ϕ du problème de Cauchy précédent.

5°) *Expression de* ϕ *sous forme d'une série entière*

a) On considère la somme de la série entière suivante, de rayon de convergence $R > 0$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n\, x^n.$$

Etablir que S vérifie l'équation $2\,(1-x)\,y' + y = 1$ sur $]-R,\, R[$ avec la condition $S(0) = 0$ si et seulement si la suite des coefficients $s_n$vérifie les relations $s_0 = 0$, puis $s_n = \rho_n\, s_{n-1}$ pour $n \geq 1$, où ρ_n désigne un nombre rationnel qu'on exprimera en fonction de n.

b) Inversement, on suppose la suite des coefficients s_n définie par les relations précédentes.

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum s_n\, x^n$.
- Montrer que $s_n = u_n$, puis en déduire l'égalité suivante pour $-1 < x < 1$:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\, x^n.$$

c) Montrer que cette série entière définissant ϕ est normalement convergente sur $[-1,\, 1]$. En déduire que l'égalité précédente reste valable sur $[-1,\, 1]$ et préciser $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

6°) *Une extension du théorème de Weierstrass*

On note alors $C([0,\,1],\,\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues f de $[0,\,1]$ dans $\mathbb{C}$, qu'on munit dans la suite de la norme $\|\,.\,\|_\infty$ définie par : $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \;/\; 0 \leq x \leq 1\}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par e_k la fonction-polynôme définie sur $[0,\,1]$ par $e_k(x) = x^k$.

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x appartenant à $[0,\,1]$, on pose :

$$f_n(x) = 1 - \sum_{j=1}^{n} u_j \left(1 - x^2\right)^j.$$

Déterminer, pour $0 \leq x \leq 1$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$, puis $\lim_{n \to +\infty} x^{2k} f_n(x)$ où $k \in \mathbb{N}$.

b) Etablir pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout réel x appartenant à $[0,\,1]$, la majoration suivante :

$$\left|x^{2k+1} - x^{2k} f_n(x)\right| \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j.$$

En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \|e_{2k+1} - e_{2k} f_n\|_\infty = 0$ et vérifier que $e_{2k}\, f_n \in \mathrm{Vect}(e_{2k} \;/\; k \in \mathbb{N}\}$.

c) On rappelle l'énoncé du *Théorème de Weierstrass* : le sous-espace $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(e_k \;/\; k \in \mathbb{N}\}$ des fonctions-polynômes de $[0,\,1]$ dans $\mathbb{C}$ est dense dans $C([0,\,1],\,\mathbb{C})$ pour $\|\,.\,\|_\infty$.
Déduire des résultats précédents la généralisation suivante du théorème de Weierstrass : le sous-espace $\mathcal{Q} = \mathrm{Vect}(e_{2k} \;/\; k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $C([0,\,1],\,\mathbb{C})$ pour $\|\,.\,\|_\infty$.