E.P.I.T.A.

Epreuve de mathématiques (3 h)

Dans ce problème, on considère un segment $I = [a, b]$, où les réels a et b vérifient $a < b$, et on étudie l'interpolation d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par des polynômes.
La partie I conduit à un algorithme de calcul de ces polynômes d'interpolation, tandis que la partie II étudie l'erreur d'interpolation commise en remplaçant f par ces polynômes.

■ Partie I : Algorithme de calcul des polynômes d'interpolation de f

Dans cette partie, on associe à toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points supposés deux à deux distincts de $I = [a, b]$ une suite (P_n) de polynômes d'interpolation de f qu'on étudie ci-dessous.

1°) *Définition des polynômes d'interpolation* (P_n)

Pour tout entier naturel n, on considère l'application ϕ_n définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \phi_n(P) = (P(x_0),\, P(x_1),\, \dots,\, P(x_n)).$$

a) Montrer que l'application ϕ_n est linéaire et injective de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) En déduire que ϕ_n réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

c) Etablir qu'il existe un et seul polynôme appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, qu'on notera P_n, tel que :

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n(x_1) = f(x_1), \quad \dots \quad , P_n(x_n) = f(x_n).$$

2°) *Construction des polynômes* P_0, P_1, P_2

a) Montrer que $P_0(X) = \Delta_0(x_0)$, où l'on a posé $\Delta_0(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

b) Montrer qu'il existe un réel λ_1 tel que $P_1(X) - P_0(X) = \lambda_1(X - x_0)$.
Exprimer $\lambda_1 = \Delta_1(x_0, x_1)$ en fonction de x_0, x_1, $\Delta_0(x_0) = f(x_0)$ et $\Delta_0(x_1) = f(x_1)$.
Vérifier les égalités suivantes :

$$P_1(X) = \Delta_1(x_0, x_1)\,(X - x_0) + \Delta_0(x_0) = \Delta_1(x_0, x_1)\,(X - x_1) + \Delta_0(x_1).$$

c) Montrer qu'il existe un réel λ_2 tel que $P_2(X) - P_1(X) = \lambda_2(X - x_0)\,(X - x_1)$.
Etablir que $\lambda_2 = \Delta_2(x_0, x_1, x_2)$ dépend de x_0, x_1, x_2 et s'exprime comme suit :

$$\Delta_2(x_0, x_1, x_2) = \frac{\Delta_1\,(x_1, x_2) - \Delta_1\,(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}.$$

En déduire l'expression de P_2 dans la base $(1,\, X - x_0,\, (X - x_0)\,(X - x_1))$.

d) On suppose, dans cette question seulement, que $x_0 = -1$, $x_1 = +1$, $x_2 = 0$ et que :

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Déterminer par la méthode précédente les polynômes d'interpolation P_0, P_1, P_2.

3°) *Expression du polynôme d'interpolation P_n dans une base de* $\mathbb{R}_n[X]$

On considère la famille de polynômes définie par $N_0(X) = 1$ et, pour $k \geq 1$, par :

$$N_k(X) = (X - x_0)\,(X - x_1) \ldots (X - x_{k-1}) = \prod_{i=0}^{k-1} (X - x_i).$$

a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que la suite $(N_0,\ N_1,\ \ldots,\ N_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, qu'il existe un réel λ_n tel que $P_n(X) - P_{n-1}(X) = \lambda_n\, N_n(X)$.

c) On suppose, pour un entier $n \geq 1$, qu'il existe des fonctions $\Delta_0,\ \Delta_1,\ \ldots,\ \Delta_{n-1}$, où Δ_k est fonction de $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_k$ pour $k < n$, telles qu'on ait pour tout entier naturel $k < n$:

$$P_k(X) = \Delta_0(x_0)\, N_0\,(X) + \Delta_1(x_0,\, x_1)\, N_1(X) + \ \ldots\ + \Delta_k(x_0,\, x_1,\ \ldots,\, x_k)\, N_k(X).$$

Montrer qu'il existe une fonction Δ_n des variables $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ telle qu'on ait :

$$P_n(X) = \Delta_0(x_0)\, N_0\,(X) + \Delta_1(x_0,\, x_1)\, N_1(X) + \ \ldots\ + \Delta_n(x_0,\, x_1,\ \ldots,\, x_n)\, N_n(X).$$

Enoncer le résultat ainsi démontré.

4°) *Relations de récurrence entre les coefficients* $\Delta_k(x_0,\, x_1,\ \ldots,\, x_k)$

a) En exploitant les résultats de la question précédente, montrer sans nouveaux calculs que :

$$P_n(X) = \Delta_0(x_1) + \Delta_1(x_1,\, x_2)\,(X - x_1) + \ \ldots\ + \Delta_n(x_1,\, x_2,\ \ldots,\, x_n,\, x_0) \prod_{i=1}^{n} (X - x_i).$$

b) En comparant les deux expressions précédentes de P_n, démontrer les relations suivantes (on observera les coefficients de X^n et X^{n-1} dans P_n) :

◇ $\Delta_n(x_0,\, x_1,\ \ldots,\, x_{n-1},\, x_n) = \Delta_n(x_1,\, x_2,\ \ldots,\, x_n,\, x_0)$.

◇ $\Delta_n(x_0,\, x_1,\ \ldots,\, x_n) = \dfrac{\Delta_{n-1}(x_1,\, x_2,\ \ldots,\, x_n) - \Delta_{n-1}(x_0,\, x_1,\ \ldots,\, x_{n-1})}{x_n - x_0}$.

5°) *Algorithme de calcul des coefficients* $\Delta_k(x_0,\, x_1,\ \ldots,\, x_k)$ *et de* $P_n(x)$

On constitue le tableau de nombres réels suivant, dont la première colonne est connue puisqu'on a pour tout réel $x \in I$ l'égalité $\Delta_0(x) = f(x)$:

$_0)$				
$_1)$	$\Delta_1(x_0,\, x_1)$			
$_2)$	$\Delta_1(x_1,\, x_2)$	$\Delta_2\,(x_0,\, x_1,\, x_2)$		
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$_n)$	$\Delta_1\,(x_{n-1},\, x_n)$	$\Delta_2\,(x_{n-2},\, x_{n-1},\, x_n)$	$\cdots$	$\Delta_n\,(x_0,\ \ldots,\, x_{n-1},$

a) Ecrire un algorithme donnant les éléments $\Delta_1(x_{k-1},\, x_k)$ de la seconde colonne ($k \leq n$).

b) Ecrire plus généralement un algorithme donnant tous les éléments du tableau ci-dessus.
Quel est le nombre d'opérations nécessaires au calcul des éléments de ce tableau?

c) Pour tout réel x, on définit une suite de fonctions par $u_0(x) = \Delta_n(x_0,\, x_1,\ \ldots,\, x_n)$, puis :

$$\forall\, k \in [\![1,\, n]\!],\quad u_k(x) = \Delta_{n-k}(x_0,\, x_1,\ \ldots,\, x_{n-k}) + (x - x_{n-k})\, u_{k-1}(x).$$

Déterminer $u_n(x)$ en fonction de $P_n(x)$.
Quel est le nombre d'opérations nécessaires au calcul de $P_n(x)$?

■ Partie II : Etude de l'erreur d'interpolation

Dans cette partie, on suppose de plus que la fonction f est de classe C^∞ sur $I = [a, b]$, et pour tout entier naturel n, on note $M_n = \sup\left\{\left|f^{(n)}(x)\right| \ / \ x \in [a, b]\right\}$.

On se propose pour $n \geq 1$ de majorer $|f(x) - P_{n-1}(x)|$, puis son maximum lorsque x décrit I.

6°) *Une majoration de l'erreur d'interpolation* $|f(x) - P_{n-1}(x)|$

A tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \in I \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, on associe la fonction suivante :

$$\forall\, t \in I, \quad \varphi_x(t) = f(t) - P_{n-1}(t) - K_x \prod_{k=0}^{n-1} (t - x_k)$$

où K_x désigne la constante (dont on vérifiera l'existence et l'unicité) telle que $\varphi_x(x) = 0$.

a) Déterminer les valeurs $\varphi_x(x_k)$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
   En remarquant que $\varphi_x(x) = 0$, en déduire que $\varphi_x{}'$ s'annule en n points au moins de I.

b) Etudier par récurrence sur k $(1 \leq k \leq n)$ le nombre minimal de points de I en lesquels la dérivée $\varphi_x{}^{(k)}$ s'annule, et en déduire l'existence d'un réel $c_x \in I$ tel que $\varphi_x^{(n)}(c_x) = 0$.

c) En déduire qu'on a $f^{(n)}(c_x) - K_x\, n! = 0$.

d) En déduire la majoration suivante pour tout nombre réel x appartenant à $I = [a, b]$:

$$|f(x) - P_{n-1}(x)| \leq \frac{M_n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} |x - x_k|.$$

On déduit de cette dernière inégalité la majoration suivante de l'erreur d'interpolation :

$$\max\{|f(x) - P_{n-1}(x)| \ / \ a \leq x \leq b\} \leq \frac{M_n}{n!} \max\left\{\prod_{k=0}^{n-1} |x - x_k| \ / \ a \leq x \leq b\right\}.$$

On s'intéresse désormais à un choix de $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ minimisant ce dernier maximum, et on désignera dans la suite par P un polynôme unitaire à coefficients réels de degré $n \geq 1$ (on rappelle qu'un polynôme est dit *unitaire* lorsque son coefficient dominant est égal à 1).

7°) *Une propriété des polynômes unitaires de degré n sur* $[-1, 1]$

a) A l'aide de la relation trigonométrique $\cos((n+1)\,\theta) + \cos((n-1)\,\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\,\theta)$, montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un polynôme T_n tel qu'on ait, pour tout réel θ, la relation $\cos(n\,\theta) = T_n(\cos(\theta))$.
   On précisera $T_1(X)$, $T_2(X)$, $T_3(X)$, et on donnera $T_{n+1}(X)$ à l'aide de $T_n(X)$ et $T_{n-1}(X)$.

b) Préciser le degré de T_n et son coefficient dominant.
   Donner sous la forme $x = \cos(\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$ les racines de T_n appartenant à $[-1, 1]$.
   En déduire la factorisation de T_n en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

c) Dans toute la suite, on désigne par t_n le polynôme défini par $t_n(X) = 2^{1-n}\, T_n(X)$ $(n \geq 1)$.
   Déterminer $\max\{|t_n(x)| / -1 \leq x \leq 1\}$ et expliciter pour $n \geq 1$ les points $a_k = \cos(\alpha_k)$ avec $0 \leq \alpha_k \leq \pi$ et $0 \leq k \leq n$ en lesquels on a l'égalité $|t_n(a_k)| = 2^{1-n}$.

d) On suppose que le polynôme unitaire P, dont le degré est n, est distinct du polynôme t_n.
   On se propose de montrer par l'absurde que $\max\{|P(x)| / -1 \leq x \leq 1\} \geq 2^{1-n}$ pour $n \geq 1$.
   A cet effet, on suppose que $\max\{|P(x)| / -1 \leq x \leq 1\} < 2^{1-n}$.

Examiner le signe de la différence $t_n(a_k) - P(a_k)$ pour $0 \leq k \leq n$, puis en déduire que le polynôme $t_n - P$ admet au moins n racines réelles appartenant à $[-1,\ 1]$.
Etablir que le degré de $t_n - P$ est strictement inférieur à n et en déduire que :

$$\forall\, n \geq 1, \quad \max\{|P(x)| \,/\, -1 \leq x \leq 1\} \geq 2^{1-n}.$$

8°) *Un choix optimal des points d'interpolation pour* P_{n-1}

On désigne toujours par P un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$.

a) Etablir que $\max\{|P(x)| \,/\, a \leq x \leq b\} = \max\left\{\left|P\left(\frac{a+b}{2} + s\,\frac{b-a}{2}\right)\right| \Big/ -1 \leq s \leq 1\right\}$.

b) Etablir que le polynôme $\left(\frac{2}{b-a}\right)^n P\left(\frac{a+b}{2} + X\,\frac{b-a}{2}\right)$ est unitaire et en déduire que :

$$\max\{\,|P(x)| \;/\; a \leq x \leq b\} \;\geq\; 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

Vérifier qu'il y a égalité lorsque $\left(\frac{2}{b-a}\right)^n P\left(\frac{a+b}{2} + X\,\frac{b-a}{2}\right) = t_n(X)$.

c) En revenant aux notations de la question 6°, montrer que :

$$\max\left\{\prod_{k=0}^{n-1} |x - x_k| \;/\; a \leq x \leq b\right\} \;\geq\; 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

d) Déduire de la question 7° la factorisation du polynôme t_n dans $\mathbb{R}[X]$.

On choisit pour $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$ les points $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ où $0 \leq k \leq n-1$.

A l'aide de la question 6°, vérifier qu'on a alors :

$$\max\{|f(x) - P_{n-1}(x)| \;/\; a \leq x \leq b\} \;\leq\; \frac{2\,M_n}{n!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

Montrer que cette dernière majoration est alors optimale pour une fonction f donnée.