Corrigé de l'épreuve II

Une extension du théorème de Weierstrass

■ Partie I : Etude d'une suite de nombres réels

1.a) On vérifie que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n-1}{2n+2} < 1$, et la suite (u_n) est décroissante.

1.b) Comme $u_1 = 1/2$, on calcule comme suit $u_2, \ldots, u_N$:

$u \longleftarrow \frac{1}{2}$;

pour $k := 1$ à $N-1$ faire : $u \longleftarrow \frac{2k-1}{2k+2}\,u$; afficher u ; fin faire ;

1.c) Si on pose $u_n = p_n / q_n$, on peut calculer comme suit les fractions $u_2, \ldots, u_N$:

$p \longleftarrow 1$; $q \longleftarrow 2$;

pour $k := 1$ à $N-1$ faire : $p \longleftarrow (2k-1)\,p$; $q \longleftarrow (2k+2)\,q$;

$d :=$ PGCD(p, q) ; $p \longleftarrow p/d$; $q \longleftarrow q/d$; afficher p, q ; fin faire ;

2.a) Comme $v_n = n^{3/2}\,u_n$, on a :

$$\varepsilon_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{2n-1}{2n}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Et un développement limité donne :

$$\varepsilon_n = -\frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2.b) Donc $\sum \varepsilon_n = \sum(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ converge vers un réel S, et les sommes partielles S_n étant égales à $S_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_1)$, on a $S = \lim(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_1)) = \lim(\ln(v_{n+1})) + \ln(2)$. On en déduit que la suite (v_n) converge vers $e^{S-\ln(2)}$, ce qui donne l'équivalent :

$$u_n \sim \frac{e^S}{2\,n^{3/2}}.$$

3.a) Une intégration par parties donne :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = \left[\sin(t)\cos^{n-1}(t)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le crochet étant nul, on en déduit que $W_n = (n-1)\,(W_{n-2} - W_n)$, soit encore :

$$\forall\, n \geq 1, \quad n\,W_n = (n-1)\,W_{n-2}.$$

3.b) En multipliant par W_{n-1}, on a $n\,W_n\,W_{n-1} = (n-1)\,W_{n-1}\,W_{n-2}$.

La suite $n \longrightarrow n\,W_n\,W_{n-1}$ est donc constante, égale à son premier terme $W_1\,W_0 = \frac{\pi}{2}$.

Par ailleurs, la suite $n \longrightarrow W_n$ est décroissante car :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = W_{n-1}.$$

On en déduit que $n\,W_n^2 \le n\,W_n\,W_{n-1} \le n\,W_{n-1}^2$, soit $n\,W_n^2 \le \frac{\pi}{2} \le n\,W_{n-1}^2$, d'où :

$$\frac{\pi}{2\,(n+1)} \le W_n^2 \le \frac{\pi}{2\,n}.$$

3.c) La relation de récurrence obtenue en (a) donne :

$$W_{2\,n} = \frac{2\,n-1}{2\,n}\,\frac{2\,n-3}{2\,n-2}\,\ldots\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,W_0 = \frac{1}{2^{2\,n}}\binom{2\,n}{n}\frac{\pi}{2} = \pi\,(n+1)\,u_{n+1}.$$

3.d) Les résultats des questions précédentes donnent alors :

$$\sqrt{\frac{\pi}{4\,(n+1)}} \le W_{2\,n} = \pi\,(n+1)\,u_{n+1} \le \sqrt{\frac{\pi}{4\,n}}\,.$$

En changeant n en $n-1$, on obtient l'encadrement suivant de u_n pour $n \ge 2$:

$$\frac{1}{2\,\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{n^{3/2}} \le u_n \le \frac{1}{2\,\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{(n-1)^{3/2}}.$$

On en déduit que $u_n \sim \frac{1}{2\,\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{n^{3/2}}$ et par comparaison avec 2°, on a $S = -\frac{1}{2}\ln(\pi)$.

4.a) L'équation différentielle $2\,(1-x)\,y' + y = 1$ admet la solution particulière $y = 1$.
Et la solution générale de l'équation homogène sur $]-1, 1[$ est $C\,\sqrt{1-x}$.
Les solutions de l'équation différentielle sur $]-1, 1[$ sont donc $y = 1 + C\,\sqrt{1-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

4.b) En particulier, la solution ϕ du problème de Cauchy $y(0) = 0$ est donc :

$$\phi(x) = 1 - \sqrt{1-x}\,.$$

5.a) La somme de la série entière S vérifie $S(0) = 0$ si et seulements si $s_0 = 0$.
Et elle vérifie l'équation $2\,(1-x)\,y' + y = 1$ sur l'intervalle $]-R, R[$ si et seulement si :

$$2\,(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} n\,s_n\,x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} s_n\,x^n = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, ceci équivaut pour tout $n \in \mathbb{N}$ à :

$$2\,(n+1)\,s_{n+1} - 2\,n\,s_n + s_n = 0 \text{ si } n \ge 1 \text{ et } = 1 \text{ si } n = 0.$$

Ce qui s'écrit encore $2\,s_1 = 1$ (puisque $s_0 = 0$) et, pour $n \ge 1$:

$$s_{n+1} = \frac{2\,n-1}{2\,n+2}\,s_n.$$

Comme la suite (s_n) vérifie $s_1 = u_1 = \frac{1}{2}$ et la même relation que la suite (u_n), on a $s_n = u_n$.

5.b) Inversement, si ces relations ont lieu, la série $\sum s_n\,x^n$ a pour rayon de convergence 1 car la série est absolument convergente pour $|x| < 1$, grossièrement divergente si $|x| > 1$.

En effet, ceci résulte de la règle d'Alembert qui donne :

$$\lim \left| \frac{s_{n+1}\, x^{n+1}}{s_n\, x^n} \right| = \lim \frac{2\,n-1}{2\,n+2}\, |x| = |x|.$$

Les calculs précédents montrent alors que S est la solution du problème de Cauchy donné, et il en résulte qu'on a $\phi = S$ sur $]-1,\ 1[$, c'est à dire :

$$1 - \sqrt{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2\,n+1}} \binom{2\,n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

5.c) Comme $u_n \sim e^S\, n^{-3/2}$, la série $\sum u_n$ converge, ce qui établit la convergence normale de la série entière précédente sur $[-1,\ 1]$. Et puisque son terme général est bien sûr continu, on en déduit la continuité de sa somme sur $[-1,\ 1]$.

Dans l'égalité précédente, on a donc des fonctions continues sur $[-1,\ 1]$ égales sur $]-1,\ 1[$. Elles sont donc bien égales sur $[-1,\ 1]$, ce qui montre que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

6.a) Pour $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$, et on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1 - \sum_{j=1}^{+\infty} u_j \left(1-x^2\right)^j = 1 - \phi\left(1-x^2\right) = \sqrt{1-\left(1-x^2\right)} = x.$$

On en déduit $\lim_{n \to +\infty} x^{2\,k}\, f_n(x) = x^{2\,k+1}$ pour tout entier naturel k et tout réel x de $[0,\ 1]$.

6.b) Pour $0 \leq x \leq 1$, il en résulte maintenant qu'on a :

$$\left|x^{2\,k+1} - x^{2\,k}\, f_n(x)\right| = x^{2\,k}(x - f_n(x)) = x^{2\,k} \left| \sum_{j=1}^{+\infty} u_j \left(1-x^2\right)^j - \sum_{j=1}^{n} u_j \left(1-x^2\right)^j \right|.$$

Comme $0 \leq x \leq 1$, et comme $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$, on en déduit que :

$$\left|x^{2\,k+1} - x^{2\,k}\, f_n(x)\right| = x^{2\,k} \left| \sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j \left(1-x^2\right)^j \right| \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j.$$

Ainsi donc, on a $\|e_{2\,k+1} - e_{2\,k}\, f_n\|_\infty \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j$, et comme cette expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ puisqu'il s'agit du reste d'une série convergente, on a démontré que la suite $n \longrightarrow e_{2\,k}\, f_n$ converge uniformément vers $e_{2\,k+1}$ sur $[0,\ 1]$.

Par ailleurs, il est clair que $e_{2\,k}\, f_n \in \mathrm{Vect}(e_{2\,k},\ \ldots,\ e_{2\,k+2\,n}) \subset Q = \mathrm{Vect}(e_{2\,k}\ /\ k \in \mathbb{N}\}$.

6.c) Le sous-espace $Q = \mathrm{Vect}(e_{2\,k}\ /\ k \in \mathbb{N}\}$ contient toutes les fonctions-polynômes $e_{2\,k}$, toutes les fonctions-polynômes $e_{2\,k}\, f_n$, et toutes leurs combinaisons linéaires.

Son adhérence $\overline{Q}$ contient par conséquent toutes les fonctions-polynômes $e_{2\,k}$ et $e_{2\,k+1}$, et toutes leurs combinaisons linéaires, c'est à dire l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions-polynômes.

C'est par conséquent un fermé qui contient $\mathcal{P}$, et il contient donc $\overline{\mathcal{P}} = C([0,\ 1],\ \mathbb{C})$.

Il en résulte que $\overline{Q} = C([0,\ 1],\ \mathbb{C})$, donc que Q est dense dans $C([0,\ 1],\ \mathbb{C})$ muni de $\|\ .\ \|_\infty$.
