Corrigé de l'épreuve I

L'interpolation de Lagrange

■ Partie I : Algorithme de calcul des polynômes d'interpolation de f

1°)a) L'application ϕ_n est clairement linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et elle est injective car si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ appartient à $\mathrm{Ker}(\phi_n)$, alors P admet les $n+1$ racines $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et est nul.

b) Comme de plus $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$, l'application linéaire injective ϕ_n réalise donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

c) En particulier, le $(n+1)$-uplet $(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n))$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ admet un et un seul antécédent $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\phi_n(P_n) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n))$, c'est à dire tel que :

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n(x_1) = f(x_1), \quad \ldots \quad , P_n(x_n) = f(x_n).$$

2°) *Construction des polynômes P_0, P_1, P_2*

a) Il est clair que le polynôme de degré 0 vérifiant $P_0(x_0) = f(x_0)$ est $P_0(X) = f(x_0)$.
Soit encore $P_0(X) = \Delta_0(x_0)$ où l'on a posé $\Delta_0(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

b) Le polynôme $P_1(X) - P_0(X)$ s'annule en x_0 puisqu'on a $P_1(x_0) = P_0(x_0) = f(x_0)$.
Il est donc divisible par $X - x_0$ et il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $P_1(X) - P_0(X) = \lambda_1(X - x_0)$.
En faisant alors $x = x_1$ et en tenant compte de $P_1(x_1) = f(x_1)$, on obtient :

$$\lambda_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{ou} \quad \Delta_1(x_0, x_1) = \frac{\Delta_0(x_1) - \Delta_0(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

On en déduit que $P_1(X) = \Delta_1(x_0, x_1)\,(X - x_0) + \Delta_0(x_0)$.
Puis en échangeant x_0 et x_1 et en remarquant que $\Delta_1(x_1, x_0) = \Delta_1(x_0, x_1)$, il vient :

$$P_1(X) = \Delta_1(x_0, x_1)\,(X - x_0) + \Delta_0(x_0) = \Delta_1(x_0, x_1)\,(X - x_1) + \Delta_0(x_1).$$

c) Le polynôme $P_2(X) - P_1(X)$ s'annule en x_0 et x_1 par définition de P_1 et P_2.
Il est donc divisible par $(X - x_0)\,(X - x_1)$ et il existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$P_2(X) - P_1(X) = \lambda_2(X - x_0)\,(X - x_1).$$

En faisant alors $x = x_2$ et en tenant compte de $P_2(x_2) = f(x_2) = \Delta_0(x_2)$, on obtient :

$$\lambda_2 = \frac{P_2(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta_0(x_2) - \Delta_0(x_1) - \Delta_1(x_0, x_1)\,(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)}.$$

Soit en simplifiant et en tenant compte des expressions de $\Delta_1(x_1, x_2)$ et $\Delta_1(x_0, x_1)$:

$$\lambda_2 = \Delta_2(x_0, x_1, x_2) = \frac{\Delta_1(x_1, x_2) - \Delta_1(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}.$$

On en déduit finalement :

$$P_2(X) = \Delta_2(x_0, x_1, x_2)\,(X - x_0)\,(X - x_1) + \Delta_1(x_0, x_1)\,(X - x_0) + \Delta_0(x_0).$$

d) Comme $x_0 = -1$, on a $P_0(-1) = \Delta_0(-1) = f(-1) = \frac{1}{2}$.

Ensuite, comme $x_1 = 1$, on a $P_1(X) = \Delta_1(-1, 1)\,(X+1) + \Delta_0(-1) = \frac{1}{2}$.

Enfin, comme $x_2 = 0$, on a $P_2(X) = \Delta_2(-1, 1, 0)\,(X+1)\,(X-1) + P_1(X) = 1 - \frac{X^2}{2}$.

3°) *Expression du polynôme d'interpolation P_n dans une base de $\mathbb{R}_n[X]$*

a) Comme $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sont respectivement de degrés 0, 1, ..., n, ils constituent donc une famille libre de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) D'après leur définition, les polynômes d'interpolation P_n et P_{n-1} prennent les mêmes valeurs en $x_0, \ldots, x_{n-1}$, leur différence $P_n - P_{n-1}$ s'annule en $x_0, \ldots, x_{n-1}$, et est multiple de $N_n(X) = (X - x_0) \ldots (X - x_{n-1})$, et pour des raisons de degré, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$P_n(X) - P_{n-1}(X) = \lambda_n\, N_n(X).$$

c) Raisonnons par récurrence sur *n.*
D'après la question 2°, il existe des fonctions $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ dépendant respectivement de x_0, de x_0, x_1, de x_0, x_1, x_2 telles qu'on ait la formule voulue pour P_0, P_1, P_2.
D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient en faisant pour $k = n-1$:

$$P_{n-1}(X) = \Delta_0(x_0)\, N_0(X) + \Delta_1(x_0, x_1)\, N_1(X) + \ \ldots\ + \Delta_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})\, N_{n-1}(X).$$

Comme $P_n(X) - P_{n-1}(X) = \lambda_n\, N_n(X)$, on en déduit qu'on a $P_n(X) = P_{n-1}(X) + \lambda_n\, N_n(X)$, et compte tenu de l'égalité $P_n(x_n) = f(x_n)$, on observe que λ_n est fonction de $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$\lambda_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)\ \ldots (x_n - x_{n-1})} = \frac{f(x_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(x_0, \ldots, x_k)\,(x_n - x_0)\ \ldots (x_n - x_{k-1})}{(x_n - x_0)\ \ldots (x_n - x_{n-1})}.$$

On pose donc $\lambda_n = \Delta_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ où Δ_n est une fonction de $x_0, x_1, \ldots, x_n$, et on a alors la relation $P_n(X) = P_{n-1}(X) + \Delta_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, N_n(X)$, qui conduit à :

$$P_n(X) = \Delta_0(x_0)\, N_0(X) + \Delta_1(x_0, x_1)\, N_1(X) + \ \ldots\ + \Delta_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, N_n(X).$$

Ainsi, l'hypothèse de récurrence faite au rang $n-1$ est vérifiée au rang n.
On a ainsi établi l'existence d'une suite de fonctions $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui ne dépendent donc que de la fonction *f*, et telle qu'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n(X) = \Delta_0(x_0)\, N_0(X) + \Delta_1(x_0, x_1)\, N_1(X) + \ \ldots\ + \Delta_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, N_n(X).$$

4°) *Relations de récurrence entre les coefficients $\Delta_k(x_0, x_1, \ldots, x_k)$*

a) On a établi à la question précédente que :

$$P_n(X) = \Delta_0(x_0) + \Delta_1(x_0, x_1)\,(X - x_0) + \ \ldots\ + \Delta_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \prod_{i=0}^{n-1} (X - x_i).$$

En changeant $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_0$, on obtient donc :

$$P_n(X) = \Delta_0(x_1) + \Delta_1(x_1, x_2)\,(X - x_1) + \ \ldots\ + \Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_0) \prod_{i=1}^{n} (X - x_i).$$

On dispose ainsi de deux expressions du polynôme d'interpolation P_n dans deux bases.

b) L'égalité des coefficients de X^n dans ces deux expressions donne :

$$\Delta_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_0).$$

Les coefficients de X^{n-1} dans ces deux expressions sont :

◇ $\Delta_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) - \Delta_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \sum_{i=0}^{n-1} x_i.$

◇ $\Delta_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_0) \sum_{i=1}^{n} x_i.$

L'égalité des coefficients de X^{n-1} dans ces deux expressions donne donc :

$$\Delta_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \frac{\Delta_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \Delta_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

5°) *Algorithme de calcul des coefficients* $\Delta_k(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ *et de* $P_n(x)$

a) On a établi la relation :

$$\Delta_1(x_0, x_1) = \frac{\Delta_0(x_1) - \Delta_0(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Une fois déclaré un tableau $T[i, j]$ de taille $(n + 1, n + 1)$ dont la colonne 0 contient $\Delta_0(x_i)$, dans lequel $T[i, j]$ contiendra pour $1 \leq i, j \leq n$ l'élément $\Delta_j(x_{i-j}, \ldots, x_{i-1}, x_i)$, on obtient l'algorithme suivant pour calculer sa colonne 1 :

Pour i de 1 à n, faire $T[i, 1] = (T[i, 0] - T[i - 1, 0]) / (x_i - x_{i-1})$;

b) On a établi plus haut la relation suivante :

$$\Delta_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \frac{\Delta_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \Delta_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Quitte à modifier les lettres, on en déduit que :

$$\Delta_j(x_{i-j}, \ldots, x_{i-1}, x_i) = \frac{\Delta_{j-1}(x_{i-j+1}, \ldots, x_i) - \Delta_{j-1}(x_{i-j}, \ldots, x_{i-1})}{x_i - x_{i-j}}.$$

Avec les notations précédentes, on a :

Pour j de 1 à n, faire :

Pour i de j à n, faire $T[i, j] = (T[i, j - 1] - T[i - 1, j - 1]) / (x_i - x_{i-j})$;

Le calcul de $T[i, j]$ nécessite 2 soustractions et 1 division.
Pour la colonne j, on fait donc $2\,(n + 1 - j)$ soustractions et $n + 1 - j$ divisions.
Compte tenu de la formule suivante :

$$\sum_{j=1}^{n} (n + 1 - j) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n + 1)}{2},$$

on fait donc $n(n + 1)$ soustractions et $n(n + 1)/2$ divisions pour obtenir le tableau.
Soit un nombre d'opérations équivalent à $3\,n^2 / 2$.

c) Compte tenu de $u_0(x) = \Delta_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et de la relation :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad u_k(x) = \Delta_{n-k}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-k}) + (x - x_{n-k})\, u_{k-1}(x),$$

on vérifie par récurrence sur $k \leq n$ que :

$$u_k(x) = \Delta_{n-k}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-k}) + (x - x_{n-k})\,\Delta_{n-k+1}(x_0, \ldots, x_{n-k+1}) + \ldots$$
$$\ldots + (x - x_{n-k})\,(x - x_{n-k+1})\,\ldots\,(x - x_n)\,\Delta_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-k}).$$

On en déduit que $u_n(x) = P_n(x)$.
Lorsque le tableau dressé à la question précédente est calculé, il suffit donc d'effectuer $3\,n$ opérations pour obtenir $P_n(x)$ à l'aide de la suite précédente.

■ Partie II : Etude de l'erreur d'interpolation

6°) *Une majoration de l'erreur d'interpolation* $|f(x) - P_{n-1}(x)|$

a) Le réel K_x assurant l'égalité $\varphi_x(x) = 0$ est défini par :

$$K_x = \frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{\prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)}.$$

On a donc $\varphi_x(x) = 0$ et comme on a $P_{n-1}(x_k) = f(x_k)$ pour $0 \leq k \leq n-1$, on a $\varphi_x(x_k) = 0$.
Ainsi donc, φ_x s'annule $n+1$ fois au moins dans l'intervalle $I = [a, b]$.
Ces $n+1$ points déterminent n segments sur lesquels on applique le théorème de Rolle puisque φ_x, qui est de classe C^∞, en vérifie bien les hypothèses.
Ainsi, la dérivée φ_x' s'annule au moins n fois dans l'intervalle $I = [a, b]$.

b) Raisonnons alors par récurrence et supposons que $\varphi_x^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois.
Ces $n+1-k$ points déterminent $n-k$ segments sur lesquels on peut appliquer le théorème de Rolle, ce qui assure que la dérivée $\varphi_x^{(k+1)}$ s'annule au moins $n-k$ fois dans $I = [a, b]$.
En particulier, $\varphi_x^{(n)}$ s'annule au moins une fois dans I, ce qui garantit l'existence d'un $c_x \in I$ tel que $\varphi_x^{(n)}(c_x) = 0$.

c) D'après la forme de φ_x et compte tenu de $\mathrm{dg}(P_{n-1}) \leq n-1$, on a :

$$\forall\, t \in I, \quad \varphi_x^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - K_x\, n!.$$

L'égalité $\varphi_x^{(n)}(c_x) = 0$ équivaut donc à $K_x = f^{(n)}(c_x) \big/ n!$ et on a ainsi établi, pour tout $x \in I$, l'existence d'un $c_x \in I$ tel que :

$$f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k).$$

(La formule a été établie pour $x \neq x_k$, mais elle est évidente si $x = x_k$ avec $1 \leq k \leq n-1$).
Il en résulte qu'on a pour tout $x \in I = [a, b]$:

$$|f(x) - P_{n-1}(x)| \leq \frac{M_n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} |x - x_k|.$$

7°) *Une propriété des polynômes unitaires de degré n sur* $[-1, 1]$

a) Il est clair que $\cos(1\,\theta) = \cos(\theta)$, $\cos(2\,\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.
Ainsi, on a $\cos(\theta) = T_1(\cos(\theta))$ où $T_1(X) = X$ et $\cos(2\,\theta) = T_2(\cos(\theta))$ où $T_2(X) = 2\,X^2 - 1$.

On suppose, pour tout entier $k \leq n$, qu'il existe un polynôme T_k tel que $\cos(k\,\theta) = T_k(\cos(\theta))$.
La formule de trigonométrie $\cos((n+1)\,\theta) + \cos((n-1)\,\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\,\theta)$ donne alors :

$$\cos((n+1)\,\theta) = 2\cos(\theta)\,T_n(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta)).$$

On en déduit que $\cos((n+1)\,\theta) = T_{n+1}(\cos(\theta))$ où $T_{n+1}(X) = 2\,X\,T_n(X) - T_{n-1}(X)$.
Comme $T_1(X) = X$ et $T_2(X) = 2\,X^2 - 1$, on a donc $T_3(X) = 4\,X^3 - 3\,X$.

b) Les expressions de T_1, T_2 et la relation $T_{n+1}(X) = 2\,X\,T_n(X) - T_{n-1}(X)$ démontrent par récurrence immédiate que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
Les racines de T_n appartenant à $[-1, 1]$ peuvent bien s'écrire sous la forme $x = \cos(\theta)$, avec $0 \leq \theta \leq \pi$, et l'égalité $T_n(x) = T_n(\cos(\theta)) = 0$ équivaut à $\cos(n\,\theta) = 0$, autrement dit à :

$$\theta = \theta_k = \frac{\pi}{2\,n} + \frac{k\,\pi}{n} \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

On en déduit que T_n a les n racines distinctes suivantes dans $[-1, 1]$:

$$r_k = \cos(\theta_k) = \cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2\,n}\right) \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Comme T_n est de degré n, on a donc toutes ses racines et il se factorise ainsi :

$$T_n(X) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2\,n}\right)\right).$$

c) Comme $T_n(\cos(\theta) = \cos(n\,\theta)$, il est clair que $\max\{|T_n(x)|\,/ -1 \leq x \leq 1\} = 1$.
Et comme $t_n(X) = 2^{1-n}\,T_n(X)$, on en déduit que $\max\{|t_n(x)|\,/ -1 \leq x \leq 1\} = 2^{1-n}$.
Par ailleurs, l'égalité $|t_n(x)| = 2^{1-n}$ équivaut à $|T_n(x)| = 1$, ou encore en posant $x = \cos(\theta)$, à $|T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\,\theta)| = 1$, c'est à dire à :

$$x = a_k = \cos\left(\frac{k\,\pi}{n}\right) \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq n.$$

d) Si le polynôme unitaire P vérifie $\max\{|P(x)|\,/ -1 \leq x \leq 1\} < 2^{1-n}$, on obtient facilement, en tenant compte de la relation $t_n(\cos(\theta)) = 2^{1-n}\cos(n\,\theta)$:

- $t_n(a_0) - P(a_0) = 2^{1-n}\cos(0) - P(a_0) = +2^{1-n} - P(a_0) > 0$.
- $t_n(a_1) - P(a_1) = 2^{1-n}\cos(\pi) - P(a_1) = -2^{1-n} - P(a_1) < 0$.
- $t_n(a_2) - P(a_2) = 2^{1-n}\cos(2\,\pi) - P(a_2) = +2^{1-n} - P(a_2) > 0$.
- ......
- $t_n(a_{n-1}) - P(a_{n-1}) = (-1)^{n-1}\,2^{1-n} - P(a_{n-1})$ est du signe de $(-1)^{n-1}$.
- $t_n(a_n) - P(a_n) = (-1)^n\,2^{1-n} - P(a_2)$ est du signe de $(-1)^n$.

Ainsi, la fonction polynômiale, donc continue, t_n s'annule entre a_0 et a_1, entre a_1 et a_2, ... , entre a_{n-1} et a_n, c'est à dire au moins n fois.
Or comme t_n et P sont unitaires de degré n, leur différence est de degré au plus $n-1$.
Et ce polynôme ayant au moins n racines, ce devrait être le polynôme nul, ce qui n'est pas puisque $P \neq t_n$. Cette contradiction montre qu'un polynôme unitaire de degré n vérifie :

$$\forall\, n \geq 1, \quad \max\{|P(x)|\,/ -1 \leq x \leq 1\} \geq 2^{1-n}$$

8°) *Un choix optimal des points d'interpolation pour* P_{n-1}

a) L'application $s \longrightarrow \frac{a+b}{2} + s\,\frac{b-a}{2}$ est clairement bijective de $[-1,\ 1]$ sur $[a,\ b]$.

Il en résulte que lorsque s décrit $[-1,\ 1]$, alors $x = \frac{a+b}{2} + s\,\frac{b-a}{2}$ décrit $[a,\ b]$, d'où :

$$\max\{|P(x)|\,/\,a \le x \le b\} = \max\left\{\left|P\left(\frac{a+b}{2} + s\,\frac{b-a}{2}\right)\right| \Big/ -1 \le s \le 1\right\}.$$

b) Comme P est unitaire de degré n, le coefficient dominant de $P\left(\frac{a+b}{2} + X\,\frac{b-a}{2}\right)$ est $\left(\frac{b-a}{2}\right)^n$ et $\left(\frac{2}{b-a}\right)^n P\left(\frac{a+b}{2} + X\,\frac{b-a}{2}\right)$ étant unitaire, le résultat de la question 7° donne :

$$\max\left\{\left|\left(\frac{2}{b-a}\right)^n P(x)\right| \Big/ a \le x \le b\right\} \ \ge\ 2^{1-n}.$$

L'égalité demandée en résulte, et c'est une égalité si $\left(\frac{2}{b-a}\right)^n P\left(\frac{a+b}{2} + X\,\frac{b-a}{2}\right) = t_n(X)$.

c) Comme $\prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k)$ est unitaire de degré n, l'inégalité précédente montre aussitôt que :

$$\max\left\{\prod_{k=0}^{n-1} |x - x_k|\ /\ a \le x \le b\right\} \ \ge\ \left(\frac{b-a}{2}\right)^n 2^{1-n}.$$

d) D'après 7.b), la factorisation du polynôme unitaire t_n est la suivante :

$$t_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2\,n}\right)\right).$$

En supposant $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2\,k+1}{2\,n}\,\pi\right)$ pour $0 \le k \le n-1$, on a donc :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2\,k+1}{2\,n}\,\pi\right)\right).$$

Soit encore :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2\,X - (a+b)}{b-a} - \cos\left(\frac{2\,k+1}{2\,n}\,\pi\right)\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n t_n\left(\frac{2\,X - a - b}{b-a}\right).$$

On a donc dans ce cas :

$$\max\left\{\prod_{k=0}^{n-1} |x - x_k|\ /\ a \le x \le b\right\} \ =\ \left(\frac{b-a}{2}\right)^n 2^{1-n}.$$

Et la majoration obtenue au 6° conduit à la majoration suivante, qui est alors optimale :

$$\max\{|f(x) - P_{n-1}(x)|\ /\ a \le x \le b\} \ \le\ \frac{2\,M_n}{n\,!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$